浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第8讲　事件独立性

例1：有10件产品，其中8件为正品，2件次品. 从中取2次, 每次取1件.（1）采用不放回抽样,（2）采用放回抽样. 设A_i={第 i 次取到正品}, i=1, 2. 比较$P(A_2 \mid A_1)$与$P(A_2)$.

不放回抽样时， $P(A_2 \mid A_1)=\frac{7}{9} \neq P(A_2)=\frac{8}{10}$

放回抽样时， $P(A_2 \mid A_1)=\frac{8}{10}=P(A_2)$.

因此，放回抽样时，A_1的发生对A_2的发生概率不影响.

$$P(A_2 \mid A_1) = P(A_2) \Rightarrow P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

还可以得到$P(A_1 \mid A_2) = \dfrac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_2)} = P(A_1)$.

即A_2的发生对A_1的发生概率也不影响.

这就是事件A_1与A_2相互独立.

定义：设A, B是两随机事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称A, B相互独立.

之所以用上述方式定义，一是因为A与B的对称性，二是不需要条件概率存在的条件，即事件的概率可以为0.

若$P(A)>0, P(B)>0,$

则$P(AB)=P(A)P(B)$等价于 $P(B|A)=P(B)$

也等价于 $P(A|B)=P(A)$

直观来看，若A与B相互独立，则不论A是否发生，都不能提供B是否发生的信息,反之也是.这就有下面的性质：

A,B相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A},B$相互独立

$\Leftrightarrow A,\overline{B}$相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A},\overline{B}$相互独立.

证明：仅证明当$P(AB)=P(A)P(B)$时，

$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$，其他的证明类似.

$\because$当$P(AB)=P(A)P(B)$时

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)$$

$$=P(A)-P(AB)=P(A)\left[1-P(B)\right]=P(A)P(\overline{B})$$

定义： 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个随机事件，

若对$2 \le k \le n$，均有：

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right),$$

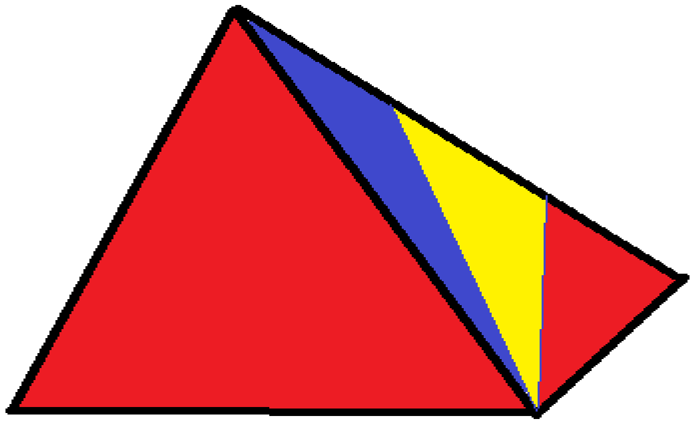
则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立.

特别地，对于事件A,B,C,相互独立的定义为：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\end{array}\right\}\text{两两独立}\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{array}\right\}\text{相互独立}$$

两 两 独 立 $\overset{?}{\Rightarrow}$ 相 互 独 立 ？

例2: 有一个正四面体, 现在给一面漆上红色, 一面漆上黄色, 一面漆上蓝色, 还有一面漆上红黄蓝三色. 现在任取一面.



令$A=$"这面含红色",

$B=$"这面含黄色",

$C=$"这面含蓝色".

问：A,B,C是否两两独立?

是否相互独立?

解：对这四面分别标号为 1,2,3,4.

则$S=\{1,2,3,4\}$, $A=\{1,4\}, B=\{2,4\}, C=\{3,4\}$

$$AB=AC=BC=ABC=\{4\}$$

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/2$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=1/4.$$

$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C),$

$P(BC)=P(B)P(C)$ 两两独立

$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$ 不是相互独立.

实际问题中，常常不是用定义去验证事件的独立性，而是由实际情形来判断其独立性.

一旦确定事件是相互独立的，在计算概率时，尽可能转化为事件的乘积进行计算.

例3：$P(A)=0.5, P(B)=0.4$，求下列情况下$P(A\cup B)$.

(1)A与B独立，　(2)A与B不相容，

(3)$A\supset B$，　(4) $P(AB)=0.3$.

解：(1)$P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=0.7$,

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$,

(3)$P(A\cup B)=P(A)=0.5$,

(4)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6$.

例4：有5个独立元件构成的系统(如图1)，设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率.

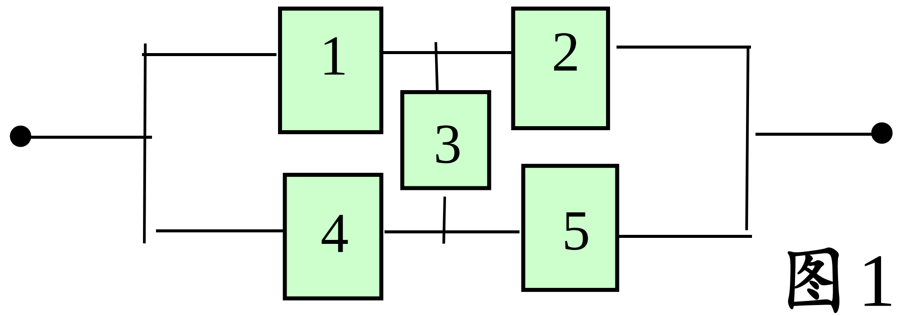


图1

解：设$A_i=\{$第i个元件运行正常$\}, i=1,2,3,4,5$

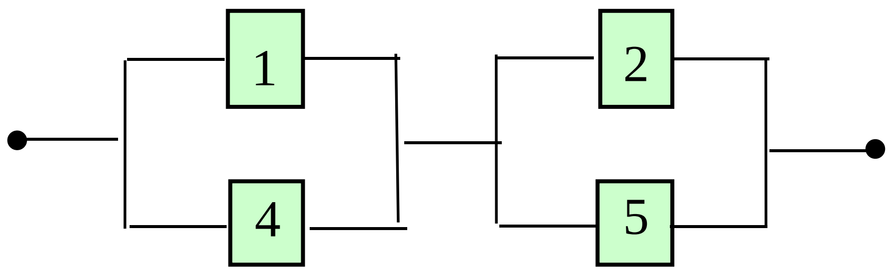
$A=\{$系统运行正常$\}$

$$P(A)=P(A_3)\cdot P(A|A_3)+P(\bar{A}_3)\cdot P(A|\bar{A}_3)$$

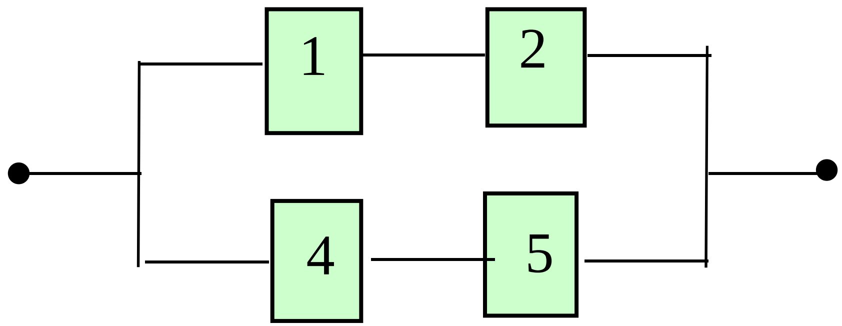
$$p_1 \hat{=} P(A|A_3)$$

$$=P\big((A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)\big)$$

$$=[P(A_1\cup A_4)]^2=(2p-p^2)^2$$



$$
\begin{aligned}
p_2 &\triangleq P(A \mid \bar{A}_3) \\
&= P\left(A_1A_2 \cup A_4A_5\right) \\
&= 2p^2 - p^4
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_3)\cdot P(A \mid A_3) + P(\bar{A}_3)\cdot P(A \mid \bar{A}_3) \\
&= p(2p-p^2)^2 + (1-p)(2p^2-p^4) \\
&= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5
\end{aligned}
$$

关于小概率事件

如果事件A发生的概率p=0.0001.那么进行一次试验，事件A会发生吗？

人们经过长期的实践总结得到“概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的”(称之为实际推断原理).

例5：某技术工人长期进行某项技术操作，他经验丰富，因嫌按规定操作太过烦琐，就按照自己的方法进行，但这样做有可能发生事故．设他每次操作发生事故的概率为p=0.0001，他独立重复进行了n次操作．求

（1）n次都不发生事故的概率；

（2）至少有一次发生事故的概率．

解：设$A_i=\{$第i次不发生事故$\}, i=1,2,\cdots,n.$

$B=\{n$次都不发生事故$\}$,

$C=\{$至少发生一次事故$\}$.

则$A_1,\ldots,A_n$相互独立，$P(A_i)=1-p=0.9999,$

$$P(B)=P(A_1\ldots A_n)=(1-p)^n$$

$$P(C)=1-P(B)=1-(1-p)^n.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} P(C) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty}(1-p)^n = 1.$

上式的意义为："小概率事件"在大量独立重复试验中"至少有一次发生"几乎是必然的。

因此提醒我们，决不能轻视小概率事件.

$n = 7000$时, $P(C) = 1-(1-0.0001)^{7000} = 0.5053 > 0.5.$

$n = 30000$时, $P(C) = 1-(1-0.0001)^{30000} = 0.9502.$