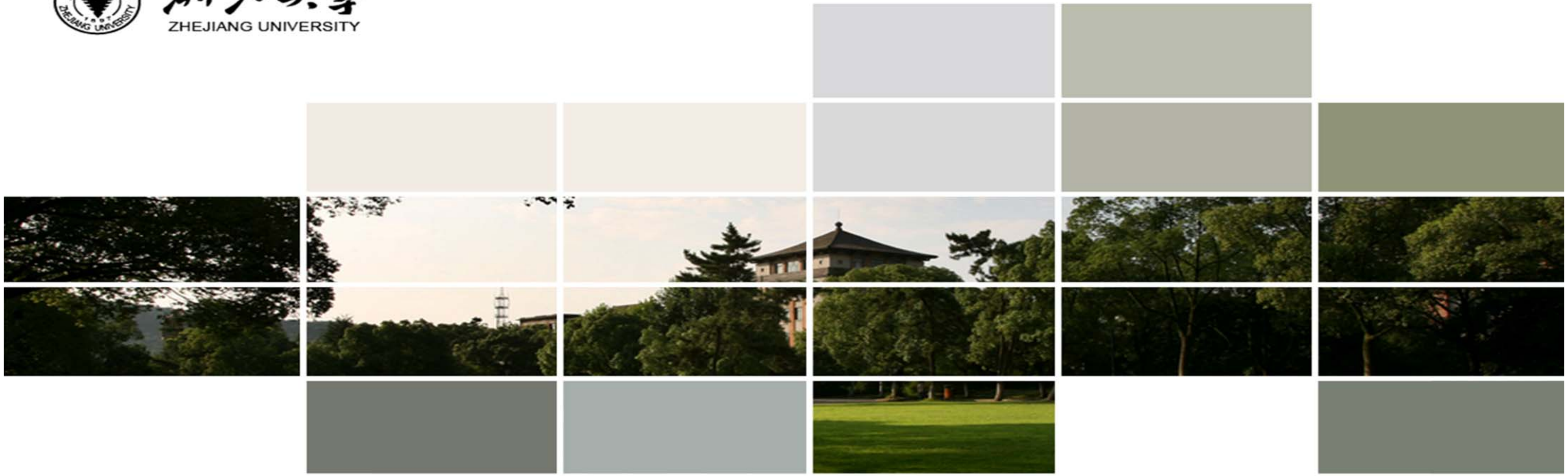
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第6讲　条件概率

例1：一个家庭中有两个小孩，已知至少一个是女孩，问两个都是女孩的概率是多少？

（假定生男生女是等可能的）

解：由题意，样本空间为

$S = \{(\text{兄，弟}), (\text{兄，妹}), (\text{姐，弟}), (\text{姐，妹})\}$

$A = \{(\text{兄，妹}), (\text{姐，弟}), (\text{姐，妹})\}$

$B = \{(\text{姐，妹})\}$

由于事件A已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件B包含的基本事件只占其中的一种， 所以有

$$P(B|A)=\frac{1}{3}$$

$P(B|A)$表示A发生的条件下,B发生的条件概率.

在这个例子中，若不知道事件A发生，

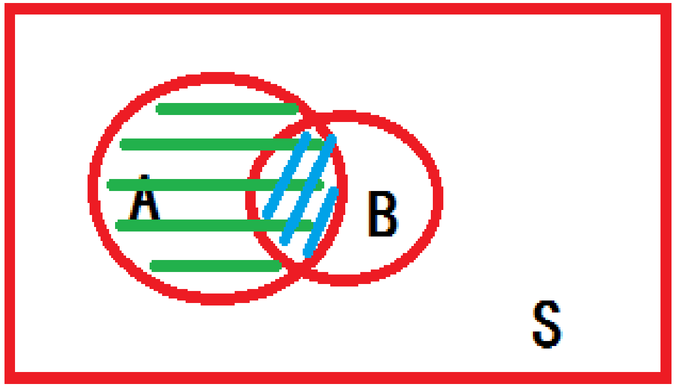
则事件B发生的概率为$P(B)=\frac{1}{4}$.

这里$P(B)\neq P(B|A)$.

其原因在于事件A的发生改变了样本空间，

使它由原来的S缩减为新的样本空间$S_A=A$.

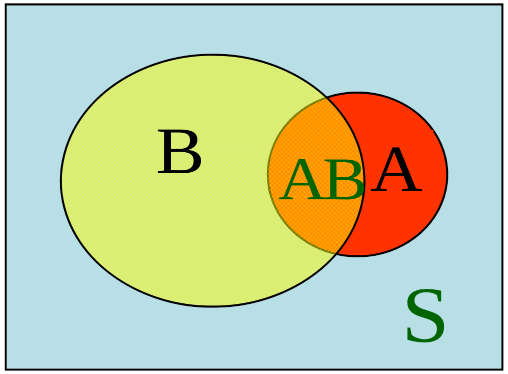
条件概率的图示分析：



$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

理解为B在A中所占的比例.

一、条件概率定义



$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A)\neq 0$$

性质：$P(\bullet\,|\,A)$是概率

(1) 非负性：$P(B\,|\,A)\geq 0;$

(2) 规范性：$P(S\,|\,A)=1;$

(3) 可列可加性：$B_1, B_2, \ldots, B_iB_j=\varnothing, i\neq j,$

则 $$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\,|\,A)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i\,|\,A).$$

$P(\bullet \mid A)$具有概率的所有性质.

例如：$P(B \mid A) = 1 - P(\overline{B} \mid A)$

$$P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A) - P(BC \mid A)$$

$$B \supset C \Rightarrow P(B \mid A) \geq P(C \mid A)$$

例2：对某地区调查了1439人,研究吸烟与患呼吸道疾病之间的关系.数据如右：

	患病	不患病	
吸烟	320	405	725
不吸烟	74	640	714
	394	1045	1439

解：在这1439人中随机选一人，设A表示吸烟，B表示患病.

则$P(A)=\dfrac{725}{1439}=0.504,$

$$P(B)=\frac{394}{1439}=0.274,$$

$$P(AB)=320/1439=0.222,$$

$$P(B\,|\,A)=320/725=0.441,$$

$$P(B\,|\,\overline{A})=74/714=0.104.$$

二、乘法公式

当下面的条件概率都有意义时：

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=P(B)\cdot P(A\mid B)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)$$

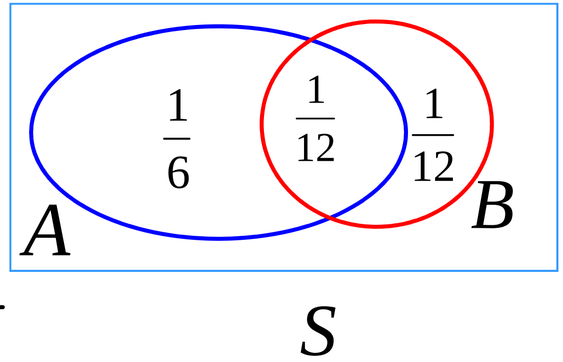
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=$$
$$P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1\cdots A_{n-1})$$

例3：$P(A)=1/4, P(B|A)=1/3, P(A|B)=1/2,$

求 $P(A\cup B), P(\bar{A}|A\cup B).$

解：$P(AB)=P(A)P(B|A)=1/12.$

$$P(AB)=P(A|B)P(B)\Rightarrow P(B)=1/6$$



$$P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$$

$$P(\bar{A}|A\cup B)=1-P(A|A\cup B)=1-\frac{1/4}{1/3}=\frac{1}{4}.$$

例4：一盒中有5个红球，4个白球，采用不放回抽样，每次取一个，取3次.

（1）求前两次中至少有一次取到红球的概率；

（2）已知前两次中至少有一次取到红球，求前两次中恰有一次取到红球的概率；

（3）求第1，2次取到红球第3次取到白球的概率.

解：令$A_i=\{$第i次取到红球$\}$，$i=1,2,3$

$B=\{$前两次至少有一次取到红球$\}$,

$C=\{$前两次恰有一次取到红球$\}$.

$$(1)P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)=1-\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{6}.$$

$$(2)P(C\,|\,B)=1-P(\overline{C}\,|\,B)=1-\frac{P(B\overline{C})}{P(B)}=1-\frac{P(A_1A_2)}{P(B)}=\frac{2}{3}.$$

$$(3)P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(\overline{A}_3\,|\,A_1A_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{10}{63}.$$

- 例5：某人参加某种技能考核，已知第1次参加能通过的概率为60%；若第1次未通过，经过努力，第2次能通过的概率为70%；若前二次未通过，则第3次能通过的概率为80%。求此人最多3次能通过考核的概率。

解：令$A_i=\{$第i 次通过考核$\}$，$i=1,2,3$

$A=\{$最多三次通过考核$\}$

则 $\overline{A}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$=1-0.4\times0.3\times0.2=0.976.$$