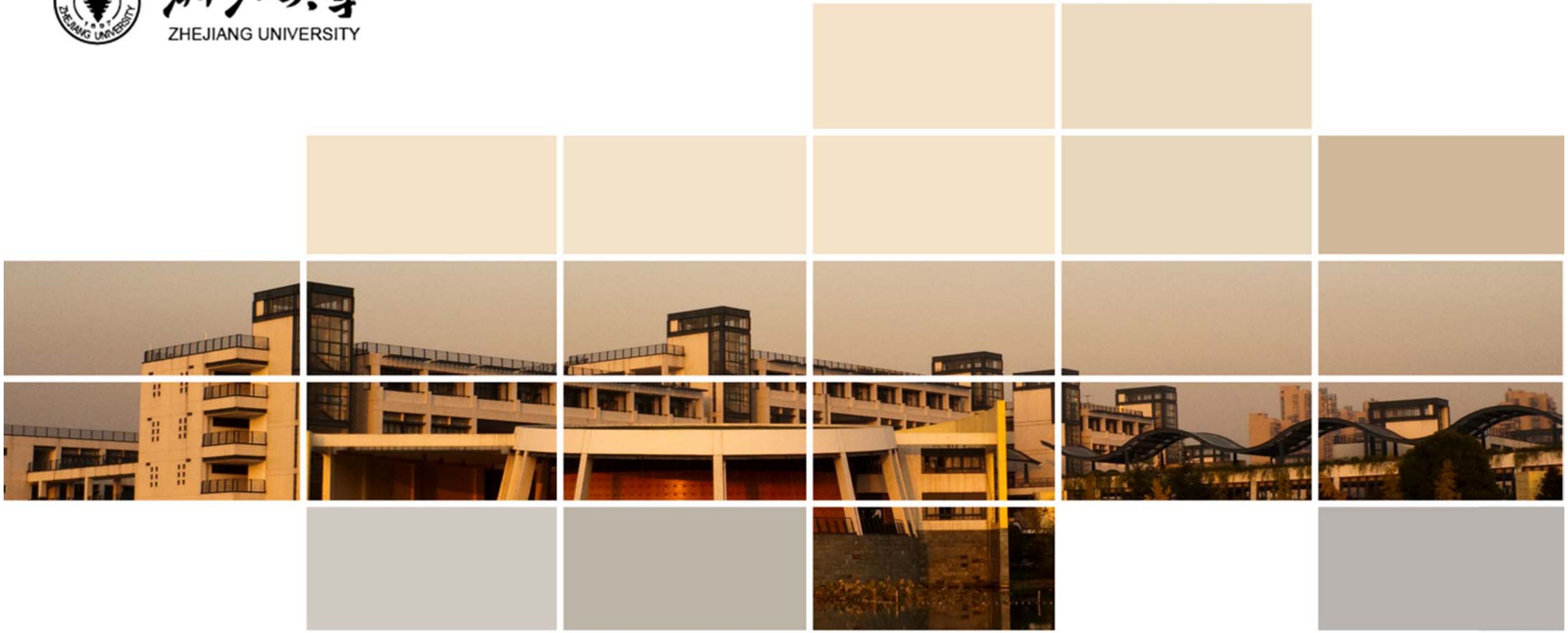
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第59讲：两个正态总体参数的假设检验

(比较两个正态总体方差的检验)

假设：

• $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 是来自 $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ 的样本，

• $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是来自 $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ 的样本，

• 两样本相互独立.

并记 $\overline{X}, \overline{Y}, S_1^2, S_2^2$ 分别为两样本的均值和方差。

设 μ_1, μ_2 未知，显著水平 α.

检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

可取检验统计量为：$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$.

在原假设成立时， $F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

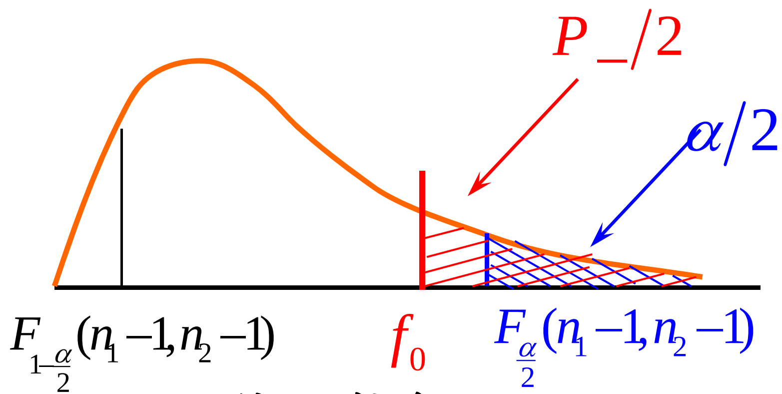
检验拒绝域为：

$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$, 或 $F \geq F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

$$P\_ = 2\min\{P(F \geq f_0), P(F \leq f_0)\}$$

其中: $f_0 = s_1^2 / s_2^2$.

$P\_ \leq \alpha$,拒绝原假设, $P\_ > \alpha$,接受原假设.



$P_$值$>\alpha$,接受H_0.

左边检验：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$

可取检验统计量为：$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$.

检验拒绝域为：$F\le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$

P_值为：$P\_=P(F\le f_0)$，其中 $f_0=s_1^2/s_2^2$.

结论：$P\_\le\alpha$，拒绝原假设，$P\_>\alpha$，接受原假设.

右边检验：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

可取检验统计量为：$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}.$

检验拒绝域为：$F\ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$

P_值为：$P\_=P(F\ge f_0)$，其中 $f_0=s_1^2/s_2^2.$

结论：$P\_\le\alpha$,拒绝原假设，　$P\_>\alpha$,接受原假设.

例1：两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径(毫米)如下:

- 甲机床 15.0 14.8 15.2 15.4 14.9 15.1 15.2 14.8
- 乙机床 15.2 15.0 14.8 15.1 14.6 14.8 15.1 14.5 15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X, Y,

且$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$

(1) 检验假设$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$($\alpha$=0.1)；

(2) 检验假设$H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$($\alpha$=0.1)。

本例的Excel计算见实验23.

解： (1) 当μ_1,μ_2未知时，

检验假设： $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2, H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

拒绝域为：$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\le F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$,

或 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

查表得：$F_{0.05}(7,8)=3.50$,

$$F_{0.95}(7,8)=\frac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\frac{1}{3.73}=0.268.$$

由条件得：$n_1 = 8,\ \ \bar{x} = 15.05,\ \ s_1^2 = 0.0457;$

$$n_2 = 9,\ \ \bar{y} = 14.9,\ \ s_2^2 = 0.0575.$$

计算得： $0.268 < f_0 = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 0.795 < 3.50$

结论：不拒绝原假设，故认为方差没有显著差异。

P_值为：$P\_ = 2P(F(7,8) \le 0.795) = 0.775 > 0.1.$

根据P_值，同样不拒绝假设.

(2) 检验假设：$H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

拒绝域为：$\dfrac{\left|\bar{X} - \bar{Y}\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$

计算得：$|t_0| = \dfrac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = 1.354 < t_{0.05}(15) = 1.7531$

结论：接受原假设.

P_值为：$P\_ = 2P\{t(15) \geq 1.354\} = 0.196 > 0.1.$

问题：本例在第53讲中出现过，

（1）在得到均值差的置信区间中，为什么置信区间包含0，可以认为两个均值没有显著差异呢？

（2）方差比的置信区间中，为什么置信区间包含1，可以认为两个方差没有显著差异呢？

(1) $\mu_1-\mu_2$的置信区间:$(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$

置信区间包含0，即

$$\bar{X}-\bar{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<0$$

$$\bar{X}-\bar{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}>0$$

等价于$\dfrac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$,

因此，对于检验假设：$H_0:\mu_1=\mu_2, H_1:\mu_1\neq\mu_2$

样本落在接受域中，从而接受原假设.

(2) $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

置信区间包含1，即

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<1,\quad \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}>1$$

等价于$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\dfrac{S_1^2}{S_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

说明样本不落在检验假设：

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\ H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

的拒绝域中.