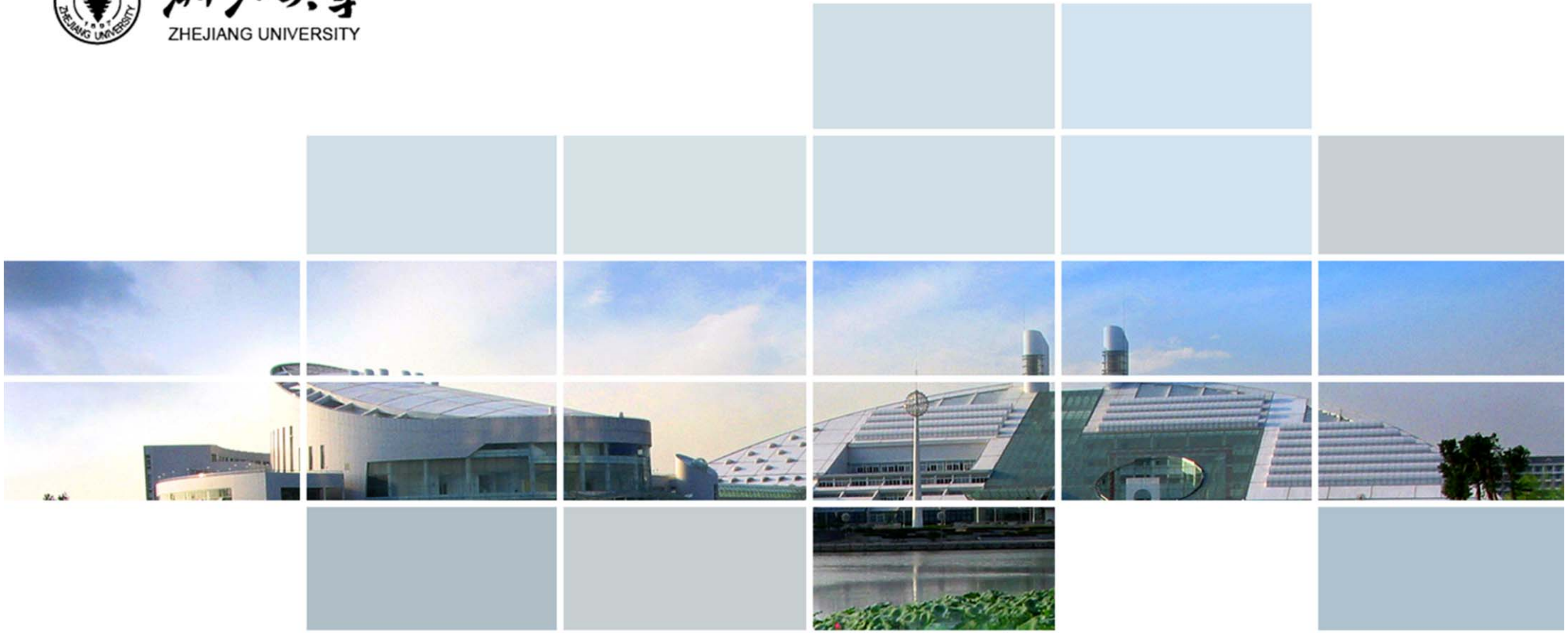
ZHEJIANG UNIVERSITY



第58讲：两个正态总体参数的假设检验

(比较两个正态总体均值的检验)

例1：通常认为男女的脉搏率是没有显著差异的．现在随机地抽取年龄都是25岁的16位男子和13位女子，测得他们的脉搏率如下：

男: 61, 73, 58, 64, 70, 64, 72, 60, 65, 80, 55, 72, 56, 56, 74, 65,

女: 83, 58, 70, 56, 76, 64, 80, 68, 78, 108, 76, 70, 97.

问题：假设男女脉搏率都是服从正态分布，这些数据能否认为男女脉搏率的均值相同?

假设：

- $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$是来自$N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$的样本，
- $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$是来自$N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$的样本，
- 两样本相互独立.

并记$\overline{X}, \overline{Y}, S_1^2, S_2^2$分别为两样本的均值和方差.

检验假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$， $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$，

$(显著水平\alpha)$.

1. 当σ_1^2和σ_2^2已知时

- 检验统计量$\bar{X}-\bar{Y}$, 拒绝域形式$\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|\ge C.$
- 当H_0成立时，$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$.

记：$Z=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

则检验拒绝域为：$|Z|\ge z_{\alpha/2}$ $--z$检验

$$P_{-} = P_{H_0}\left\{|Z| \geq |z_0|\right\} = 2(1 - \Phi(|z_0|)),$$

其中：$z_0 = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$

2. 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$但未知时

首先利用合样本给出参数σ^2的无偏估计量

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

可取检验统计量为：$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$

检验拒绝域为： $|T| = \dfrac{\left|\bar{X} - \bar{Y}\right|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \geq t_{\alpha/2}\left(n_1 + n_2 - 2\right)$

$P_$值为：$P\_ = P_{H_0}\{|T| \geq |t_0|\} = 2P\{t(n_1 + n_2 - 2) \geq |t_0|\}$

其中：$t_0 = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

——两样本精确t检验

3. 当$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$且未知时

以样本方差S_1^2，S_2^2分别代替σ_1^2，σ_2^2.

取检验统计量为：$T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$.

(1)当两个样本量都很大时，利用中心极限定理

检验的拒绝域为:$\{|T| \geq z_{\alpha/2}\}$

P_值为： $P\_ = P_{H_0}\{|T| \geq |t_0|\} = 2P\{Z \geq |t_0|\}$,

其中： $Z \sim N(0,1)$, $t_0 = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$.

(2)当两个样本为小样本时都很大时，统计量近似服从t分布，自由度为

$$k = \min(n_1 - 1, n_2 - 1),$$

或更精确的近似自由度

$$k = \frac{(S_1^2 / n_1 + S_2^2 / n_2)^2}{\dfrac{(S_1^2 / n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(S_2^2 / n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

检验的拒绝域为： $\left\{|T| \geq t_{\alpha/2}(k)\right\}$

$P_$值为： $P\_ = P_{H_0}\left\{|T| \geq |t_0|\right\} = 2P\left\{t(k) \geq |t_0|\right\}.$

——两样本近似t检验

在例1中设X,Y分别表示男女的脉搏率，

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，由已知数据计算得

$n_1 = 16, n_2 = 13, \overline{x} = 65.31, \overline{y} = 75.69,$

$s_1^2 = 56.36, s_2^2 = 211.40,$

检验假设：$H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$

注意到$s_1^2=56.36, s_2^2=211.40$,相差很大,

采用不等方差的t检验法,

检验统计量的观察值$t_0=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1}+\dfrac{s_2^2}{n_2}}}=-2.334.$

t分布的近似自由度$k=\min(n_1-1, n_2-1)=12.$

$P\_=2P\{t(12)\geq |-2.334|\}=0.038<0.05.$

结论: 拒绝原假设,认为男女脉搏率的均值不相同。

类似地， 可以给出

左边检验：

$$H_0:\mu_1 \geq \mu_2, H_1:\mu_1 < \mu_2$$

右边检验：

$$H_0:\mu_1 \leq \mu_2, H_1:\mu_1 > \mu_2$$

在上述情形下的检验规则.

例2：某厂使用两种不同的原料A,B生产同一类型产品。各在一周的产品中取样分析。

- 取用原料A生产的样品220件，测得平均重量为2.46（公斤），样本标准差s=0.57（公斤）。
- 取用原料B生产的样品205件，测得平均重量为2.55（公斤），样本标准差为0.48（公斤）。

设两样本独立，来自两个方差相同的独立正态总体。**问在水平0.05下能否认为用原料B的产品平均重量较用原料A的产品平均重量为大?**

本例的Excel计算见实验22.

解：检验假设：$H_0: \mu_1 \geq \mu_2, H_1: \mu_1 < \mu_2$

拒绝域为：$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$

由条件得：$n_1 = 220,\ \ \bar{x} = 2.46,\ \ s_1 = 0.57;$

$n_2 = 205,\ \ \bar{y} = 2.55,\ \ s_2 = 0.48.$

查表得：$t_{0.05}\left(423\right) \approx z_{0.05} = 1.645,$

计算得：$s_w = 0.5285, \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 0.097$

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = -1.754 < -1.645,$$

$$P_- = P\{t(423) \le -1.754\}$$

$$\approx \Phi(-1.754) = 0.040 < 0.05.$$

结论：拒绝原假设

问题：如果

- $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$是来自$N\left(\mu_1, \sigma^2\right)$的样本，
- $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$是来自$N\left(\mu_2, \sigma^2\right)$的样本，
- $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{n_3}$是来自$N\left(\mu_3, \sigma^2\right)$的样本，
- 三样本相互独立.

应该如何检验假设

——见第61讲.

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$， $H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3$不全相等.