第57讲：单个正态总体参数的假设检验

（成对数据t检验和参数σ的检验）

1. 成对数据t检验

配对研究的数据是一对一对地收集得到的，所以也称为成对数据的研究. 由于配对研究采用了比较的思想，比通常的单个样本推断更让人信服. 这种方法在医学和生物研究领域中广泛存在，成对数据检验的基本思想是将两样本问题转为单样本问题.

- 假设成对数据 $(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$
- 设差值 $D_i = X_i - Y_i, i=1,\cdots,n.$
- 差值可以看成来自正态总体$N(\mu_D,\sigma_D^2)$的样本

为比较两总体均值是否有显著差异，可考虑如下的检验问题：

$$H_0:\mu_D=0, H_1:\mu_D\neq 0$$

记 $\bar{D}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_i$， $S_D^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i-\bar{D})^2$，

则检验统计量为$T=\frac{\sqrt{n}\bar{D}}{S_D}$，

检验的拒绝域为$W=\{|T|\ge t_{\alpha/2}(n-1)\}$，

观察值为 $t_0=\frac{\sqrt{n}\bar{d}}{s_d}$，

P_值为：$P\_=P_{H_0}\{|T|\ge|t_0|\}=2P\{t(n-1)\ge|t_0|\}$.

例1： 为了试验两种不同谷物种子的优劣，选取了十块土质不同的土地，并将每块土地分为面积相同的两部分，分别种植这两种种子。设在每块土地的两部分人工管理等条件完全一样。下面给出各块土地上的产量。

- **种子A(xi) 23 35 29 42 39 29 37 34 35 28**
- **种子B(yi) 26 39 35 40 38 24 36 27 41 27**

- **di=xi-yi -3 -4 -6 2 1 5 1 7 -6 1**

问：这两种种子种植的谷物产量是否有显著的差异（取显著性水平为0.05)? 本例的Excel计算见实验20.

解：检验假设 $H_0:\mu_D=0, H_1:\mu_D\neq 0$

分别将$D_1, D_2, \ldots, D_n$的样本均值和样本方差记为$\bar{D}, S_D^2$,

拒绝域为：$\dfrac{\left|\bar{D}\right|}{S_D/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha/2}(n-1)$,

查表得：$t_{0.025}(9)=2.2622$

计算得： $\bar{d}=-0.2, s_d=4.442, \dfrac{|\bar{d}|}{s_d/\sqrt{n}}=0.142<2.2622$

结论：不能拒绝原假设，认为两种种子产量没有显著差异。

$$P_{-}=P_{H_0}\{|T|\geq|t_0|\}=2P\{t(n-1)\geq 0.142\}=0.89.$$

2. 参数σ的检验（假设μ未知）

设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2), \mu,\sigma^2$未知，$X_1,\ldots,X_n$是总体$X$的样本，

双边检验:$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

其中σ_0^2是已知常数。

此时σ^2的无偏估计量为样本方差S^2，

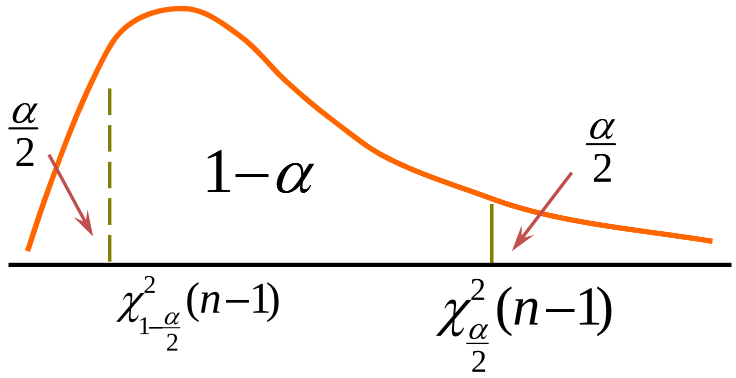
且有:$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

因此，可取检验统计量为$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

检验拒绝域形式为：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le k_1,\ \text{或}\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k_2.$$

在原假设成立时，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1).$



$$P\{拒绝H_0 \mid 当H_0为真\}$$

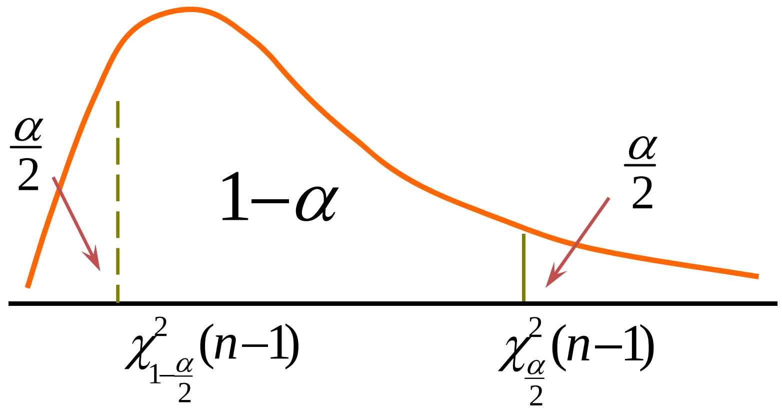
$$=P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le k_1, 或 \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\right\}=\alpha.$$

为计算方便，习惯上取

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le k_1\right\}=\frac{\alpha}{2}, P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\ge k_2\right\}=\frac{\alpha}{2}.$$

$$k_1 = \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),$$

$$k_2 = \chi^2_{\alpha/2}(n-1).$$



拒绝域为:

$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\text{ 或 }\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$$

-----χ^2**检验法**

P_值计算:

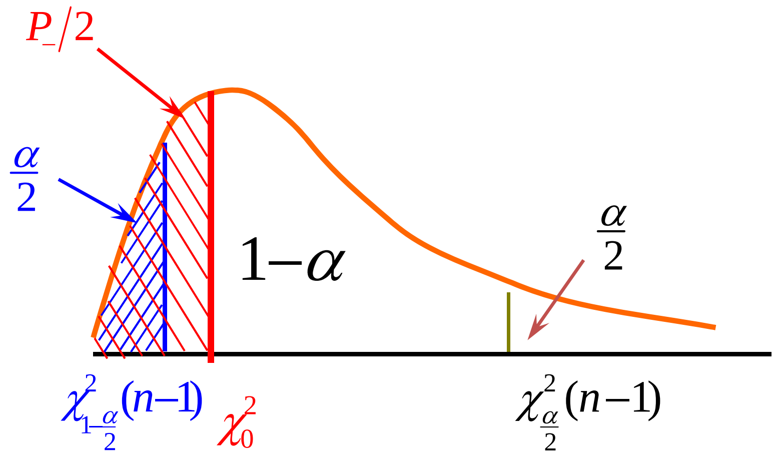
记: $p = P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\right\} = P\left\{\chi^2(n-1) \le \chi_0^2\right\}$,

其中， $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, $\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

$$P\_ = 2\min(p, 1-p)$$

当$P_ \le \alpha$，拒绝原假设,

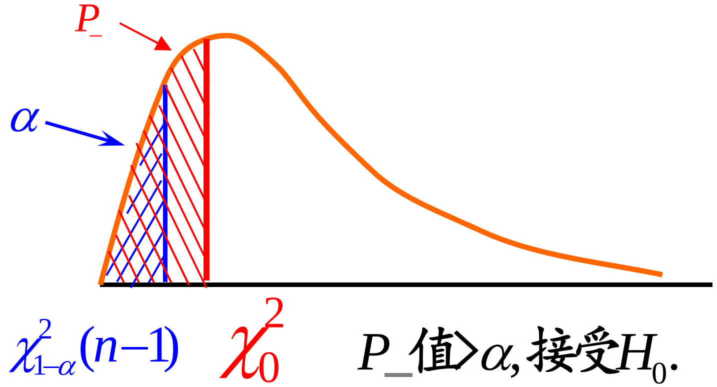
当$P_ > \alpha$，接受原假设.



P_值>α,接受H_0.

左边检验：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$

拒绝域为：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi_{1-\alpha}^2(n-1);$

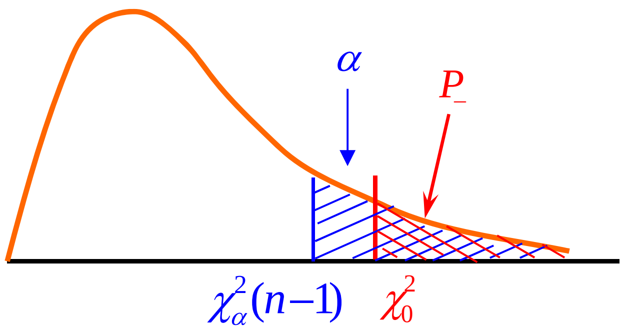


$$P\_=P_{H_0}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\right\}=P\left\{\chi^2(n-1)\le\chi_0^2\right\},$$

当$P_\le\alpha$，拒绝原假设，当$P_>\alpha$，接受原假设.

右边检验： $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$

拒绝域为： $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_\alpha^2(n-1);$



$P_$值$<\alpha$,拒绝H_0.

$$P\_=P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\right\}=P\left\{\chi^2(n-1)\geq\chi_0^2\right\},$$

当$P_\leq\alpha$，拒绝原假设，当$P_>\alpha$，接受原假设.

例2 一个园艺科学家正在培养一个新品种苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳外，另一个重要特征是单个重量差异不大（对照品种的方差 $\sigma^2=7$）.为了评估新苹果，他随机挑选了25个测试重量（单位：克），其样本方差为 $S^2=4.25$.问新品种的方差是否比对照品种方差小？ $(\alpha=0.05)$

希望从资料得出“支持的结论”即：新品种苹果的重量差异小。本例的Excel计算见实验21.

解：$H_0:\sigma^2 \geq 7, \quad H_1:\sigma^2 < 7$

拒绝域：$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

查表得：$\chi^2_{0.95}(24) = 13.848,$

计算得：$\chi_0^2 = \dfrac{(25-1)\times 4.25}{7} = 14.57 > 13.848$

结论：不拒绝原假设，即认为新品种的方差并不比对照组的小。

$P_$值计算：

计算$P_ = P\{\chi^2(24) \le 14.57\} = 0.0673 > 0.05.$

作出同样判断。