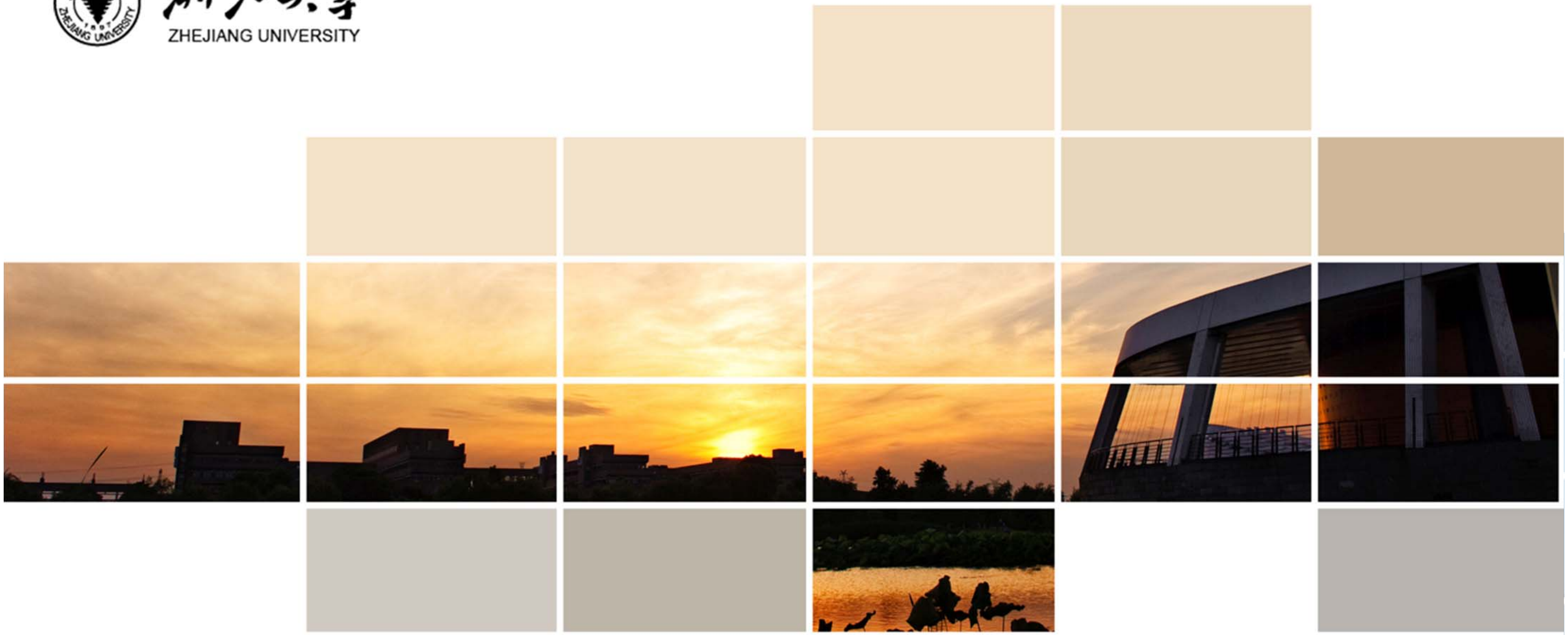
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第56讲：单个正态总体均值的假设检验

（标准差未知, t检验）

例1 可乐制造商为了检验可乐在贮藏过程中其甜度是否有损失，请专业品尝师对可乐贮藏前后的甜度进行评分. 10位品尝师对可乐贮藏前后甜度评分之差为

2. 0, 0. 4, 0. 7, 2. 0, −0. 4, 2. 2, −1. 3, 1. 2, 1. 1, 2. 3

问：这些数据是否提供了足够的证据来说明可乐贮藏之后的甜度有损失呢？设总体服从正态分布，标准差未知.

例1中，只有采集到的数据，并不知道总体的方差。如何根据这些数据得出所需要的结论呢？

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2未知——t检验法

考虑假设问题(显著水平为α)

$$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0,$$

$$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu<\mu_0,$$

$$H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu>\mu_0,$$

其中μ_0是已知的常数.

双边假设问题

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

用σ的估计量S代替σ,

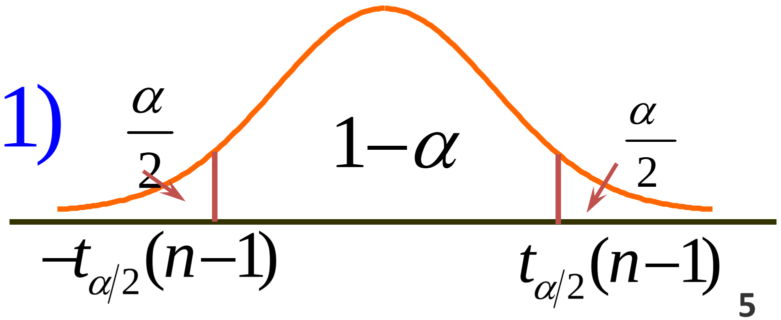
采用$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$作检验统计量。

即检验拒绝域的形式为 $\dfrac{\left|\bar{X}-\mu_0\right|}{S/\sqrt{n}} \geq k.$

当原假设成立时，$\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

根据Neyman-Pearson原则，可得拒绝域为

$$|T| = \frac{\left|\bar{X}-\mu_0\right|}{S/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha/2}(n-1)$$



$P_$值的计算

对给定的样本观察值$x_1,\cdots,x_n$,记检验统计量T

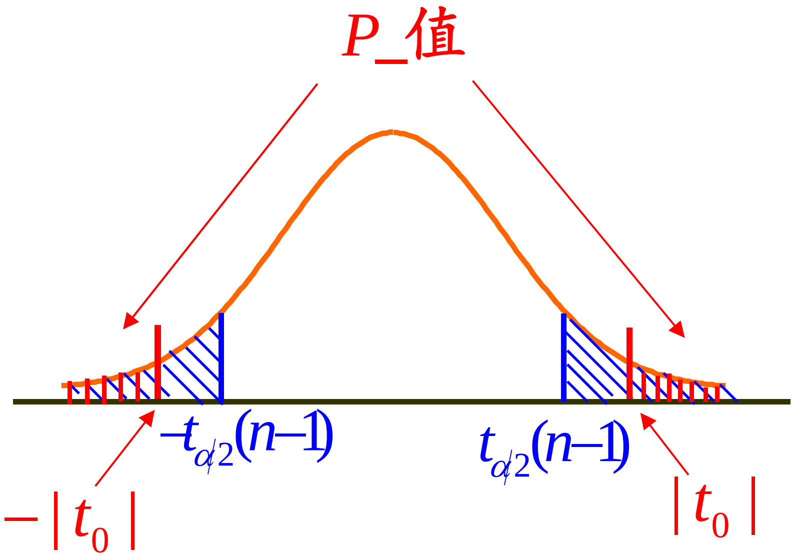
的取值为$t_0=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$，则有

$$P\_=P_{H_0}\{|T|\geq|t_0|\}$$

$$=2P\{t(n-1)\geq|t_0|\}.$$

当$P_\leq\alpha$时，拒绝原假设，

否则，接受原假设.



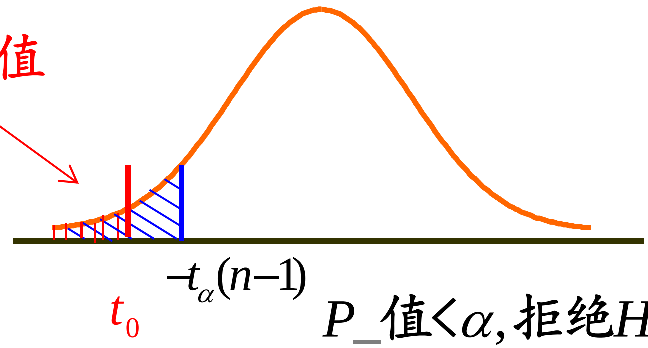
$P_$值$<\alpha$,拒绝H_0.

左边假设问题

$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$， 其中$\mu_0$已知

拒绝域为 $W = \left\{ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \le -t_\alpha(n-1) \right\}$

$P_$值为 $P_- = P\{T \le t_0\} = P\{t(n-1) \le t_0\}$.



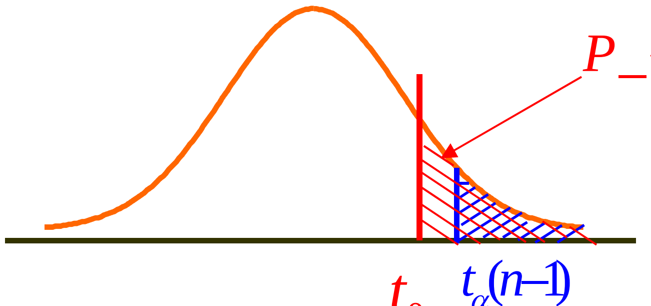
$P_$值$<\alpha$，拒绝H_0.

右边假设问题

$H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$， 其中$\mu_0$已知

拒绝域为$W = \left\{ T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1) \right\}$

$P_$值为 $P\_ = P\{T \geq t_0\} = P\{t(n-1) \geq t_0\}.$



$P_$值$>\alpha$，接受H_0.

例1的具体计算过程：

步骤1：提出假设

$H_0:\mu=0$(甜度没有损失), $H_1:\mu>0$(甜度有损失).

步骤2：计算检验统计量的值.

由样本得出，$\bar{x}=1.02, s=1.196.$

$$t_0=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{1.02-0}{1.196/\sqrt{10}}=2.70.$$

步骤3：计算P_值

由右边检验$P_$的计算方法，得$P_ = P(t(9) > 2.70)$.

查表得：**P_=0.0122.**

步骤4：根据实际情况作出判断

- 如果显著水平取α=0.05，则有充分的理由拒绝原假设。

- 如果显著水平取α=0.01，则还没有充分的理由拒绝原假设。

例2 要求某种元件的平均使用寿命不得低于1000小时，生产者从一批这种元件中随机抽取25件，测得其平均寿命为950小时，标准差为100小时。已知这批元件的寿命服从正态分布。试在显著性水平0.05下确定这批元件是否合格？

本例的Excel计算见实验19.

解：按题意需检验

$$H_0:\mu \geq \mu_0 = 1000, \qquad H_1:\mu < 1000.$$

拒绝域为： $t = \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S\big/\sqrt{n}} < -t_\alpha(n-1).$

$$n = 25, t_{0.05}(24) = 1.7109. \quad \overline{x} = 950, s = 100$$

计算得：

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = -2.5 < -1.7109 = -t_{0.05}(24).$$

t_0落在拒绝域内，故拒绝原假设，

认为这批元件的平均寿命小于1000小时。

结论：不合格。

P_{-}值为

$$P_{-} = P_{H_0}\left\{T \le t_0\right\} = P\left\{t(24) \le -2.5\right\}$$

$\approx 0.000866 < 0.05$

因此拒绝原假设，判断结果与前面一致！