浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY

第53讲　两个正态总体参数的区间估计

设样本$\left(X_1,\cdots,X_{n_1}\right)$和$\left(Y_1,\cdots,Y_{n_2}\right)$分别来自总体$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$和$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$,并且它们相互独立.

样本均值分别为$\overline{X},\overline{Y}$;样本方差分别为$S_1^2,S_2^2$.

置信水平为 $1-\alpha$.

1. $\mu_1-\mu_2$的置信区间

(1) σ_1^2,σ_2^2已知时

由$\mu_1-\mu_2$的估计$\bar{X}-\bar{Y}$的分布，得枢轴量：

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

得置信区间：$\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知

以$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$代替$\sigma^2$得枢轴量:

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

置信区间为: $\left((\bar{X}-\bar{Y})\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

(3) $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$且未知

以S_1^2估计σ_1^2,以S_2^2估计σ_2^2

当样本量n_1和n_2都充分大时(一般要>30),

$$\frac{\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

得近似置信区间为: $\left(\left(\bar{X}-\bar{Y}\right) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$

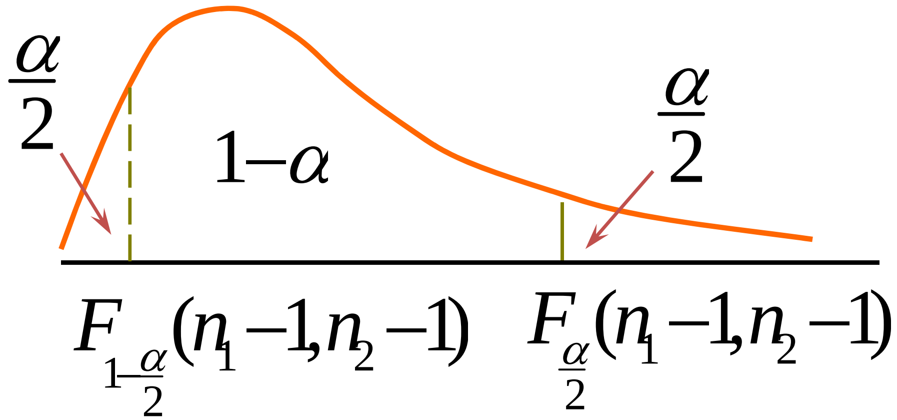
当样本量小时， $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}} \overset{\text{近似}}{\sim} t(k),$

其中 $k \approx \min(n_1-1, n_2-1)$

则近似置信区间为：$\left((\bar{X}-\bar{Y}) \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(k)\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}} \right)$

2. $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间（$\mu_1,\mu_2$未知）

由$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的估计$\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$想到枢轴量 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$



由$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$

得$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}$$

置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

例1. 两台机床生产同一型号滚珠. 从甲机床生产的滚珠中取8个, 从乙机床生产的滚珠的中取9个. 测得这些滚珠的直径（单位：毫米）如下:

甲机床: 15.0 14.8 15.2 15.4 14.9 15.1 15.2 14.8

乙机床: 15.2 15.0 14.8 15.1 14.6 14.8 15.1 14.5 15.0

设两机床生产的滚珠直径分别为X,Y,且

$$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right).$$

求置信水平为 0.9 的双侧置信区间.

(1) $\sigma_1=0.18,\ \sigma_2=0.24$, 求$\mu_1-\mu_2$的置信区间;

(2)若$\sigma_1=\sigma_2$且未知, 求$\mu_1-\mu_2$的置信区间;

(3)若$\sigma_1\neq\sigma_2$且未知，求$\mu_1-\mu_2$的置信区间;

(4)若μ_1,μ_2未知，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间.

本例的Excel计算见实验17.

解：$n_1=8,\ \bar{x}=15.05,\ S_1^2=0.0457;$

$n_2=9,\ \bar{y}=14.9,\ S_2^2=0.0575,\ \alpha=0.1$

(1) 当$\sigma_1=0.18, \sigma_2=0.24$时，$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$z_{0.05}=1.645$，从而所求区间为$(-0.018, 0.318)$

(2) 当$\sigma_1=\sigma_2$且未知时，$\mu_1-\mu_2$的置信区间为：

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$$

$$t_{0.05}(15)=1.7531, S_w=0.228, \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=0.486$$

从而所求区间为$(-0.044, 0.344)$

(3) 当$\sigma_1 \neq \sigma_2$且未知时，$\mu_1 - \mu_2$的置信区间为：

$$\left(\left(\bar{X} - \bar{Y}\right) \pm t_{\alpha/2}(k)\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right)$$

其中自由度k取$\min(n_1 - 1, n_2 - 1) = 7$

$t_{0.05}(7) = 1.895$，从而所求区间为$(-0.058, 0.358)$

注：由(1)、（2）和（3）求得的三个区间都包含了0，说明两机床生产的滚珠的平均直径没有显著差异.

——见第59讲.

(4) 当μ_1,μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间为：

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

由$F_{0.05}(7,8)=3.50, F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=\dfrac{1}{3.73}$

得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为0.90的置信区间为$(0.227, 2.965)$

注: (4) 中所求置信区间包含1,
说明两机床生产的滚珠直
径的方差没有显著差异.

——见第59讲.