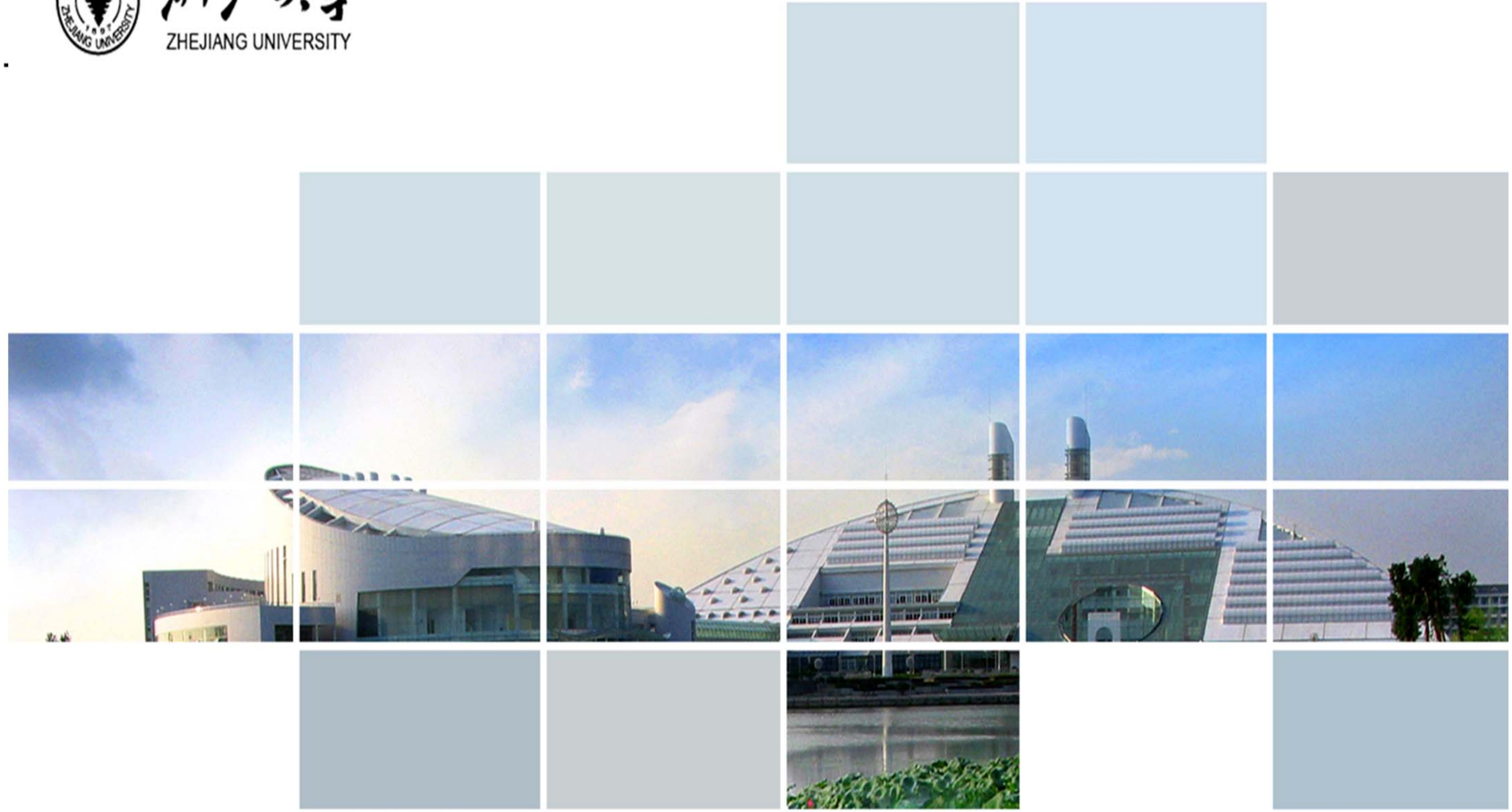


第52讲 成对数据均值差,单个正态总体方差的区间估计

1.成对数据差的均值置信区间

例：为考察某种降压药的降压效果，测试了n个高血压病人在服药前后的血压（收缩压）分别为

$$(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n).$$

由于个人体质的差异，$X_1,\cdots,X_n$不能看成来自同一个正态总体的样本，即$X_1,\cdots,X_n$是相互独立但不同分布的样本，$Y_1,\cdots,Y_n$也是. 另外对同一个个体，X_i和Y_i也是不独立的.

作差值 $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \cdots, n$,则取消了个体的差异,仅与降压药的作用有关,因此可以将$D_1, \cdots, D_n$看成来自同一正态总体$N(\mu_D, \sigma_D^2)$的样本,且相互独立.

μ_D的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$$

其中 $\bar{D} = \bar{X} - \bar{Y}$, $\quad S_D = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}$

例1：为评价某种训练方法是否能有效提高大学生的立定跳远成绩，在某大学随机选中16名学生，测量他们的立定跳远成绩（三次中最好成绩），经过三个月训练后再测量他们的成绩。实验数据如下页.

假设训练前后成绩差$D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$，求$\mu_D$的置信水平为95%的双侧置信区间.

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
训练前	189	193	230	210	198	215	234	234
训练后	220	195	234	231	225	228	238	240
数值差	−31	−2	−4	−21	−27	−13	−4	−6

编号	9	10	11	12	13	14	15	16
训练前	209	220	195	211	228	216	212	231
训练后	221	218	214	236	248	248	230	245
数值差	−12	2	−19	−25	−20	−32	−18	−14

本例的Excel计算见实验15.

解：这是成对数据问题，$n=16, \alpha=0.05$. 令$d_i = x_i - y_i$.

算得$\bar{d} = -15.375, s_d = 10.544$.

查表得$t_{0.025}(15) = 2.1315$,

代入公式$(\bar{D} \pm t_{\alpha/2}(n-1)S_D/\sqrt{n})$中，

得所求置信区间为 $(-20.994, \quad -9.756)$.

2. 方差σ^2的置信区间(μ未知)

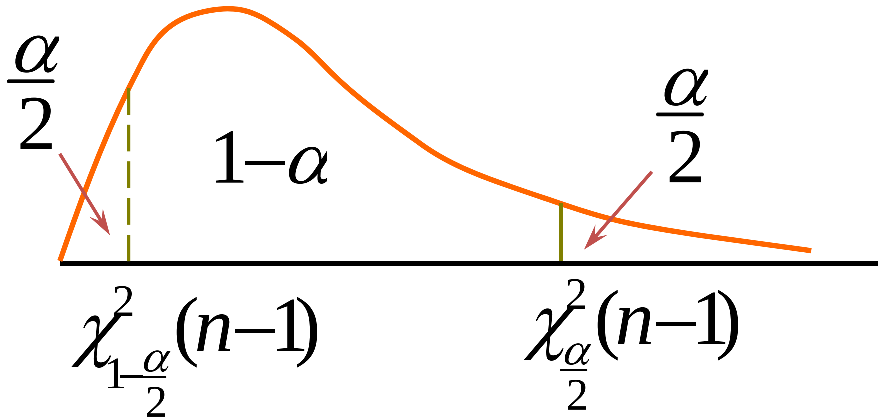
设总体$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, μ, σ^2未知.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$为样本.

$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差.

置信度为$1-\alpha$.

由σ^2的估计S^2，得到枢轴量$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$



由$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$

推 出$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$

双侧置信区间为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$

单侧置信下限为：$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$

单侧置信上限为：$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

注：上述双侧置信区间不是最优解.

例2：一个园艺科学家正在培养一个新品种的苹果，这种苹果除了口感好和颜色鲜艳以外，另一个重要特征是单个重量差异不大．为了评估新苹果，她随机挑选了25个测试重量（单位：克），其样本方差为$s^2=4.25$．试求σ^2的置信度为95%双侧置信区间和单侧置信上限．

本例的Excel计算见实验16.

解：$n=25,\ s^2=4.25,\alpha=0.05$

查表得：$\chi^2_{0.025}(24)=39.4,\qquad \chi^2_{0.975}(24)=12.4;$

$\chi^2_{0.95}(24)=13.85,$

σ^2的双侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)=(2.59,8.23)$$

σ^2的单侧置信上限为$\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}=7.36$