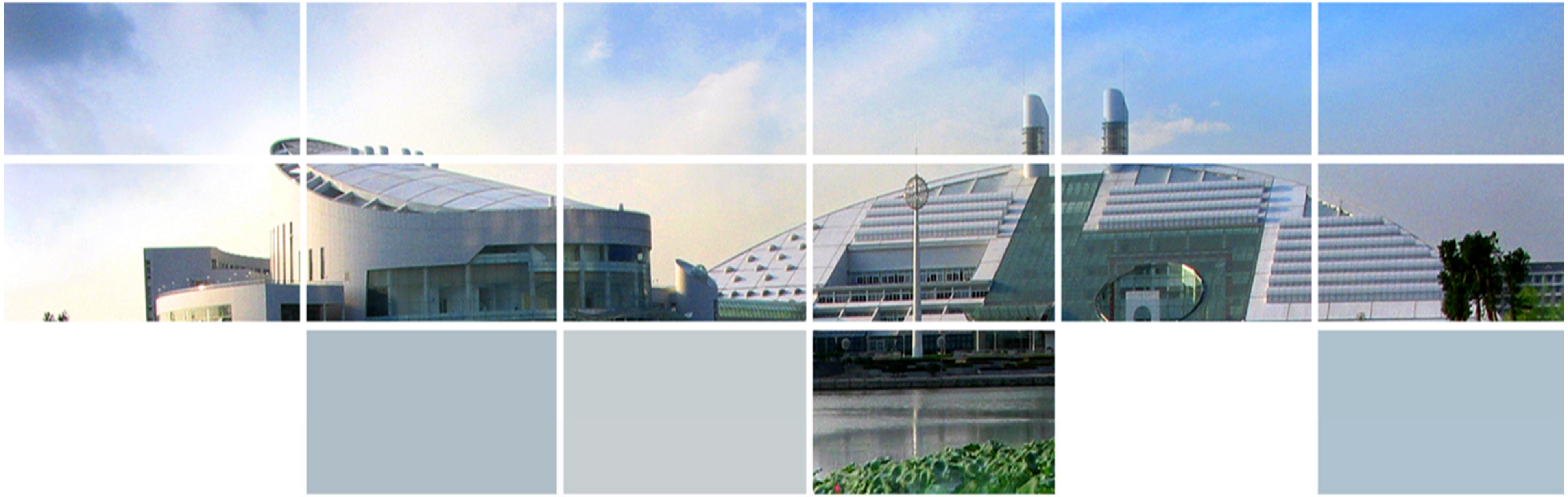
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第50讲　　枢轴量法

问题:

设总体X的分布有未知参数θ, $X_1,\ldots,X_n$是一样本.

如何给出θ的

（1）置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间?

（2）置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限?

（3）置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限?

方法：

(1) 找一个随机变量G,使G分布已知.

(2) 找$a<b$,使$P(a<G<b)\geq 1-\alpha$.

因为要求θ的区间估计，所以G应该是θ和样本$X_1,\ldots,X_n$的函数.

(3) 从$a<G<b$解出$\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_U$

$(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U)$就是置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间.

设总体X有概率密度（或分布律）$f(x;\theta)$,

其中θ是待估的未知参数.

设$X_1,\cdots,X_n$是一样本. 记:

$$G=G(X_1,\cdots,X_n;\theta)$$

为样本和待估参数θ的函数，如果G的分布已知,

不依赖于任何未知参数. 则称G为**枢轴量**.

枢轴量和统计量的区别：

- （1）枢轴量是样本和待估参数的函数，
  其分布不依赖于任何未知参数；
- （2）统计量只是样本的函数，
  其分布常依赖于未知参数.

问题：

总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2是未知参数.

要估计参数μ.设$X_1,\ldots,X_n$是一样本，

请问下面三个量，

$$\bar{X},\quad \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}},\quad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

哪些是统计量？哪些是枢轴量？

(1)只有$\overline{X}$是统计量，另两个含有未知参数.
所以不是统计量.

（2）$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2 / n)$,分布含有未知参数.

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma / \sqrt{n}}$含有除了$\mu$以外的其他未知参数$\sigma$.

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S / \sqrt{n}}$只是$\mu$和样本的函数,服从$t(n-1)$分布.

所以只有$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S / \sqrt{n}}$是枢轴量.

对枢轴量G,满足$P(a<G<b)\geq 1-\alpha$的a,b可能有很多,那到底该选哪个a,b呢?

1. 根据**Neyman**原则:求a和b使得区间长度最短;

2. 如果最优解不存在或比较复杂,对连续型总体,常取a和b满足:

$$P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\leq a)=P(G(X_1,\ldots,X_n;\theta)\geq b)=\alpha/2$$

3. 从 $a<G<b$ 解出 $\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_U$.

那么$\left(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right)$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间，

$\hat{\theta}_L$是θ的置信度为$1-\dfrac{\alpha}{2}$的单侧置信下限，

$\hat{\theta}_U$是θ的置信度为$1-\dfrac{\alpha}{2}$的单侧置信上限.

注： 枢轴量$G(X_1,\ldots,X_n;\theta)$的构造，通常从θ的点估计$\hat{\theta}$(如极大似然估计，矩估计等)出发，根据$\hat{\theta}$的分布进行改造而得.

例1：在第44讲例1中提到，《微积分》考试结束后，随机选出100名学生，计算得他们的平均成绩为72.3分，标准差为15.8分．假设全部学生的成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma$ 均未知，求μ的置信水平为95%的双侧置信区间．

解：对于正态总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,\ldots,X_n$是X的样本

μ的极大似然估计是$\bar{X}$,

$$\bar{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}), \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

由于σ未知，不能取$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$作为枢轴量！

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，可以取$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$作为枢轴量

求a,b,使得$P(a < \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < b) = 95\%$,且置信区间最短！

即：$\bar{X}-b\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}-a\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad \Leftarrow a<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<b$

且$E(\bar{X}-a\frac{S}{\sqrt{n}})-E(\bar{X}-b\frac{S}{\sqrt{n}})=(b-a)\frac{E(S)}{\sqrt{n}}=\min$

等价于在$P(a<\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<b)=95\%$成立的$a,b$中$b-a=\min$！

注意到t分布的对称性，所以

$b=-a=t_{0.025}(99)\approx z_{0.025}=1.96$

由$\bar{x}=72.3, s=15.8$计算得，μ的置信水平为95%

的双侧置信区间为(69.2, 75.4).

这一置信区间有95%的把握包含真值.

- 正态总体下常见枢轴量：

(1)单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$情形

$$\mu\text{的枢轴量：}\begin{cases} \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), & (\sigma^2\text{已知}) \\ \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), & (\sigma^2\text{未知}) \end{cases}$$

$$\sigma^2\text{的枢轴量：}\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad (\mu\text{未知})$$

(2)二个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2}),N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$情形

$\mu_1-\mu_2$的枢轴量：

$$\begin{cases} \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}} \sim N(0,1), & (\sigma_1^2,\sigma_2^2\ \text{已知}) \\ \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2), & (\sigma_1^2=\sigma_2^2\text{未知}) \end{cases}$$

其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, S_w=\sqrt{S_w^2}$

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的枢轴量：

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\bigg/\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1), \qquad (\mu_1,\ \mu_2\text{未知})$$