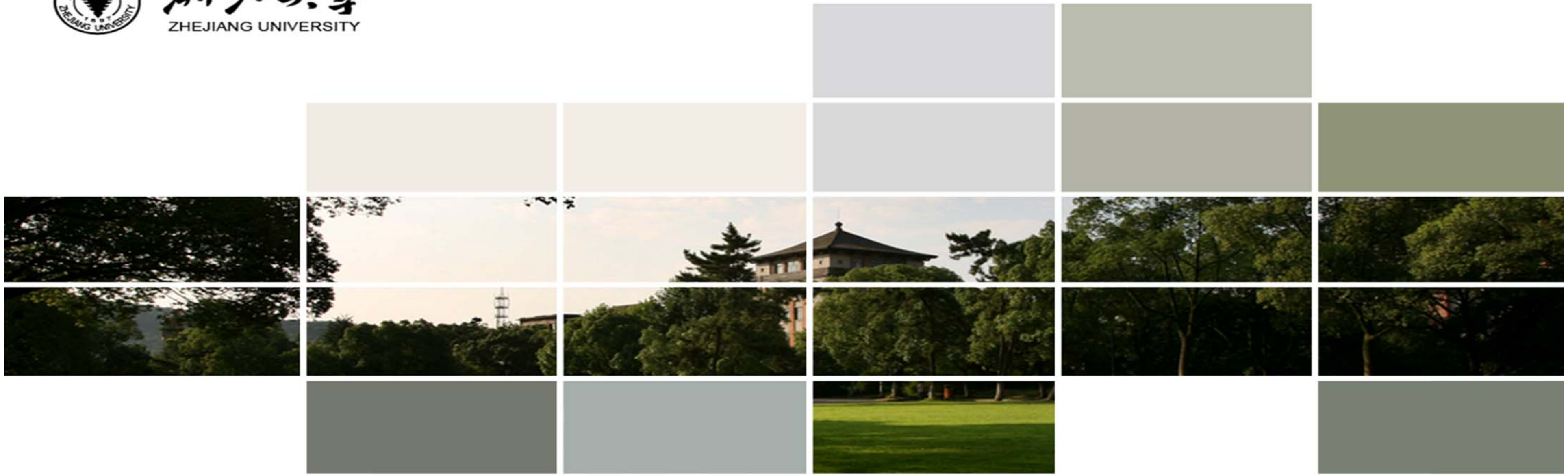
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



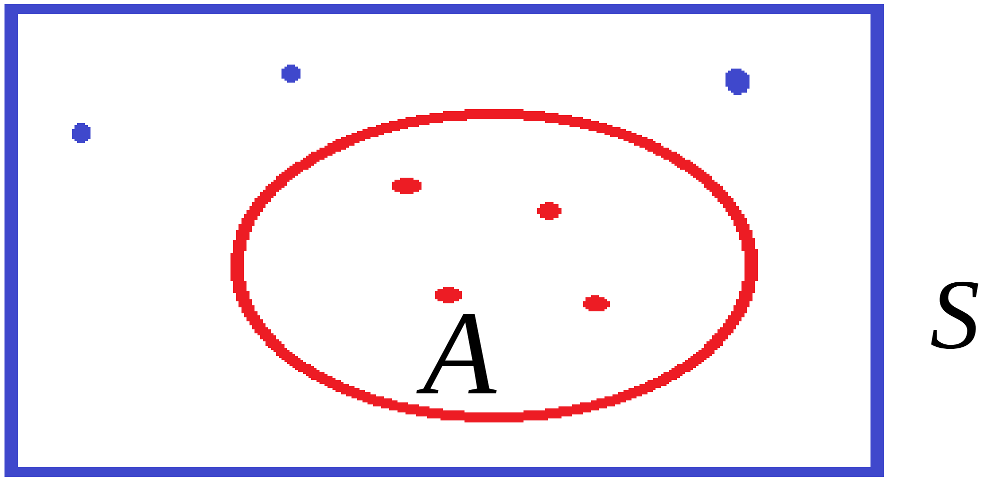
第5讲　等可能概型（古典概型）

定义：若试验满足：

•样本空间S中样本点有限(有限性)

•出现每一个样本点的概率相等(等可能性)

称这种试验为等可能概型(或古典概型)。



$$P(A)=\frac{A\text{所包含的样本点数}}{S\text{中的样本点数}}$$

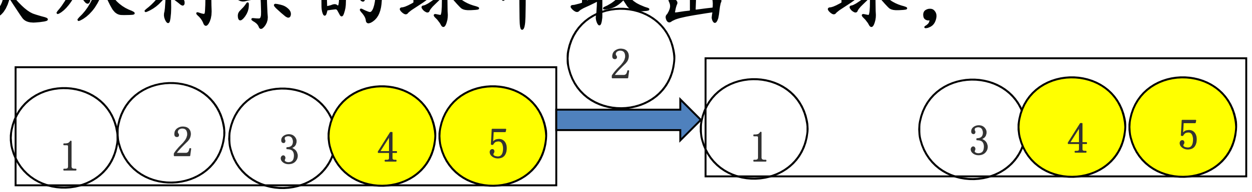
例1：一袋中有5个球，其中3个为白球，2个为黄球，设取到每一球的可能性相等.

（1）从袋中随机取一球,记A={ 取到白球 },求P(A).

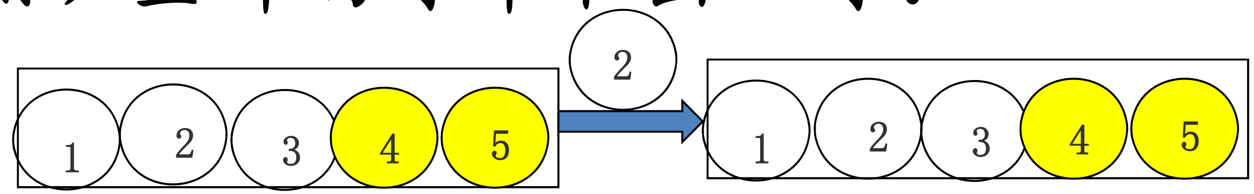
（2）从袋中不放回取两球,记B={两个都是白球},求P(B).

抽样方法说明：

1. 不放回抽样：第1次取出一个球，记录其颜色，不再放回，第2次从剩余的球中取出一球；



2. 放回抽样：第1次取出一个球，记录其颜色，放回，第2次依然从全部的球中取出一球.



解：将球编号，白球为 $1,2,3$，黄球为$4,5$.

$(1) S=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,2,3\} \Rightarrow P(A)=\dfrac{3}{5}$

$(2)\ S=\{(1,2),(1,3),\ldots,(5,3),(5,4)\}$,

$B=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.

S包含的样本点数为5×4,

B包含的样本点数为3×2.

$$P(B)=\frac{3\times 2}{5\times 4}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3$$

一般地，如果有N个球，其中a个白球，b=N-a个黄球，采用不放回抽样取n个球(n ≤N)，记A_k={恰好取到k个白球}（k≤a），则

$$P(A_k)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n},\text{其中}C_N^n=\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$P(A_0)=\frac{C_a^0 C_b^{n}}{C_N^n},P(A_1)=\frac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_N^n},P(A_2)=\frac{C_a^2 C_b^{n-2}}{C_N^n}$$

$$P(\text{至少取到2个白球})=1-P(A_0)-P(A_1)$$

$$P(\text{至多取到2个白球})=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)$$

例2：足球场内23个人(双方队员11人加1名主裁)，至少有两人生日相同的概率为多大?

解：假设每人的生日在一年365天是等可能的.

所以23人的生日共有365^{23}种可能结果.

先考虑事件A:“任何两人生日不同”，

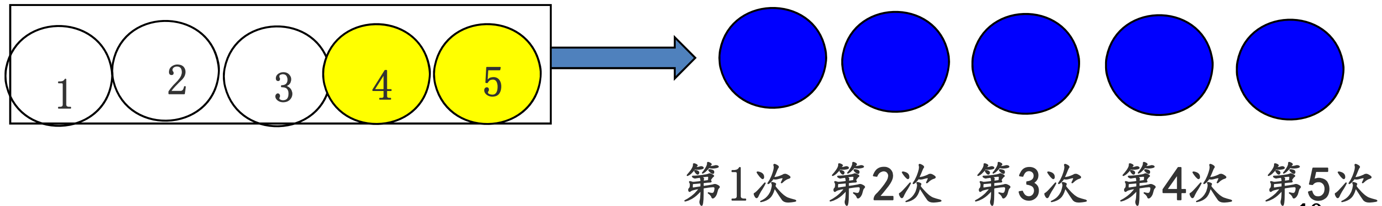
要使A发生, 共有$365\times364\times\ldots\times(365-22)$种可能.

因此，$P(A)=\dfrac{365\times364\times\cdots\times(365-22)}{365^{23}}\approx0.493$

$P(\overline{A})=1-P(A)=0.507>0.5$

类似可算出：50人的教室里至少有两人生日相同的概率约为0.97.

例3：（抽签问题）一袋中有a个白球，b个黄球，记a+b=n．设每次摸到各球的概率相等，每次从袋中摸一球，不放回地摸n次。求第k次摸到白球的概率。



记$A_k=\{$第k次摸到白球$\}, k=1,2,\cdots,n.$ 求$P(A_k).$

解1.将 n 个球依次编号为:$1,2,\ldots,n,$

其中前a号球是白球.

视$1,2,\ldots,n$的每一个排列为一样本点,

则每一样本点等概率.

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$ 与k无关

解2. 将第 k 次摸到的球号作为一个样本点，

由对称性，取到各球的概率相等.

$$S=\{1,2,\ldots,a,a+1,\ldots,n\}$$

$$A_k=\{1,2,\ldots,a\}$$

$$\Rightarrow P(A_k)=\frac{a}{n}=\frac{a}{a+b}.$$