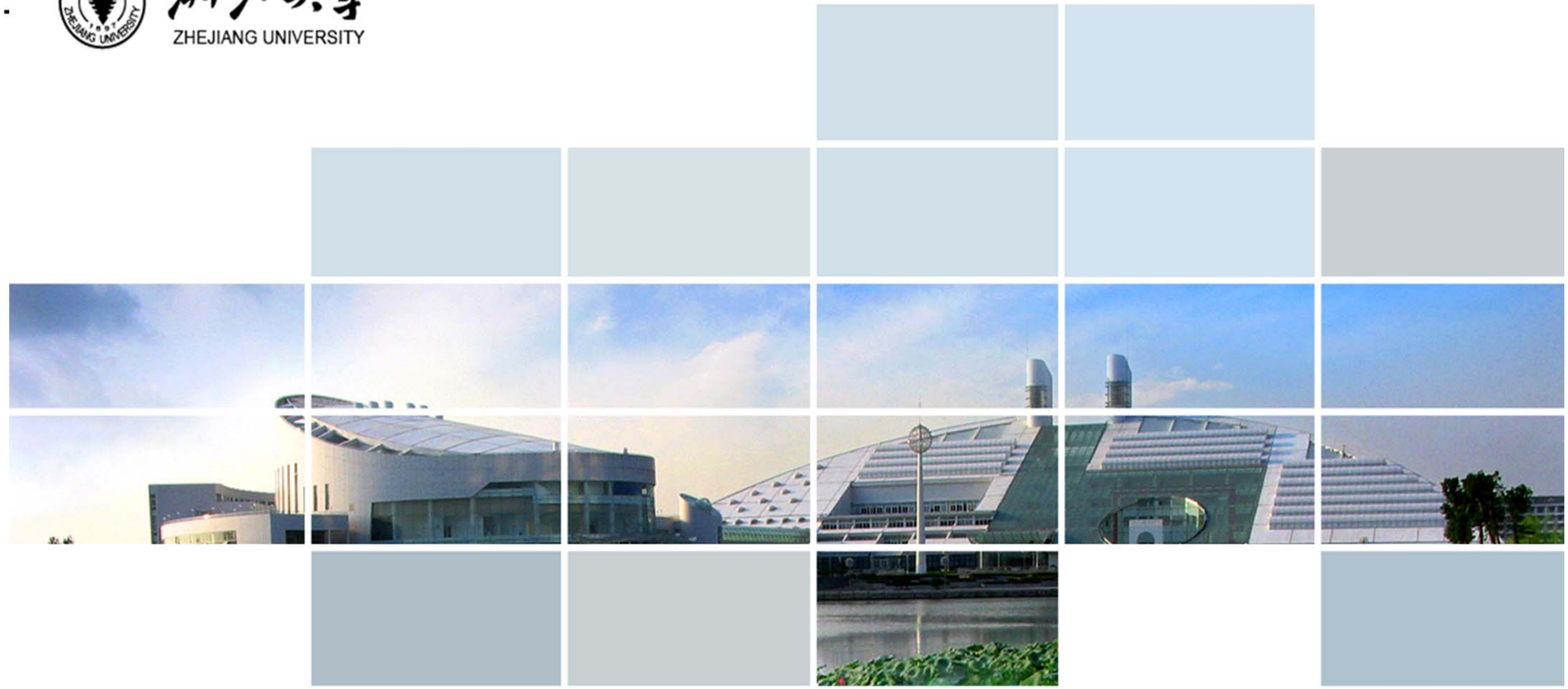
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY



第49讲　置信区间，置信限

根据具体样本观测值，点估计提供一个明确的数值.

但这种判断的把握有多大，点估计本身并没有告诉人们. 为弥补这种不足，提出区间估计的概念.

设X是总体，$X_1,\ldots,X_n$是一样本. 区间估计的目的是找到两个统计量：

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\ldots,X_n),\qquad \hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\ldots,X_n),$$

使随机区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$以一定可靠程度盖住$\theta$.

定义1：设总体X的分布函数$F(x;\theta)$，θ未知. 对给定值$\alpha(0<\alpha<1)$，有两个统计量

$$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n),\ \hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)，使得：$$

$$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$$

$\left(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U\right)$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间；

$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$分别称为双侧置信下限和双侧置信上限.

说明：参数θ虽然未知，但是确定的值.

$\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U$是统计量，随机的，依赖于样本.

置信区间$\left(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U\right)$是随机的，依赖于样本. 样本不同，算出的区间也不同.

对于有些样本观察值，区间覆盖θ，但对于另一些样本观察值，区间则不能覆盖θ.

例1：设总体$X\sim N(\mu,4)$, μ未知, $X_1,\ldots,X_4$是一样本.

则$\bar{X}\sim N(\mu,1)$.

$$P(\bar{X}-2<\mu<\bar{X}+2)=P(|\bar{X}-\mu|<2)$$

$$=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$\Rightarrow(\bar{X}-2,\bar{X}+2)$是$\mu$的置信水平为0.95的置信区间.

若$\mu = 0.5$,当$\overline{x}$分别为3, 2, 1时，对应区间为：

$(1,5)$, $(0,4)$, $(-1,3)$

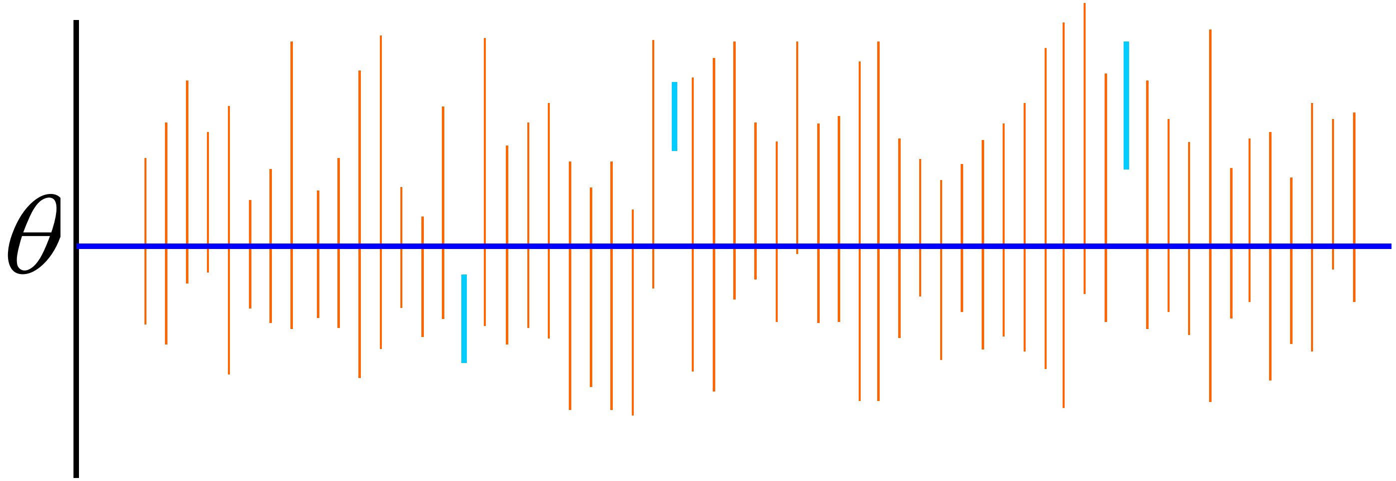
对于一个具体的区间而言，或者包含真值或者不包含真值，无概率可言。

$(\overline{X}-2, \overline{X}+2)$是$\mu$的置信水平为0.95的置信区间中“置信水平为0.95”的意义是什么？.

一般地，$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\ldots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\ldots,X_n)\right\}=1-\alpha$，

则置信区间$\left(\hat{\theta}_L,\ \hat{\theta}_U\right)$的含义为：

反复抽样多次(各次样本容量都为n).每个样本值确定一个区间$\left(\hat{\theta}_L,\ \hat{\theta}_U\right)$,每个这样的区间或包含$\theta$的真值,或不包含$\theta$的真值. 按伯努利大数定律, 在这些区间中，包含$\theta$真值的比例约为$1-\alpha$.



如反复抽样10000次，当$\alpha = 0.05$,即置信水平为95%时，10000个区间中包含θ真值的约为9500个；当$\alpha = 0.01$,即置信水平为99%时，10000个区间中包含θ的真值的约为9900个.

定义2： 如果$P\left\{\hat{\theta}_L(X_1,\ldots,X_n)<\theta\right\}\geq 1-\alpha$，则$\hat{\theta}_L$称为参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信下限.**

如果$P\left\{\theta<\hat{\theta}_U(X_1,\ldots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$，则$\hat{\theta}_U$称为参数$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的**单侧置信上限.**

单侧置信限和双侧置信区间的关系：

设$\hat{\theta}_L$是θ的置信水平为$1-\alpha_1$的单侧置信下限，

$\hat{\theta}_U$是θ的置信水平为$1-\alpha_2$的单侧置信上限，

则$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$是$\theta$的置信度为$1-\alpha_1-\alpha_2$的双侧置信区间。

$$P\left\{\hat{\theta}_L \geq \theta\right\} \leq \alpha_1, \quad P\left\{\theta \geq \hat{\theta}_U\right\} \leq \alpha_2,$$

$$P\left\{\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U\right\} = 1 - P\left\{\hat{\theta}_L \geq \theta\right\} - P\left\{\hat{\theta}_U \leq \theta\right\}$$

$$\geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2.$$

定义3：称置信区间$(\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U)$的平均长度$E(\hat{\theta}_U-\hat{\theta}_L)$
为区间的**精确度**，精确度的一半为**误差限**.

注意：在给定的样本容量下，置信水平和精确度是**相互制约**的.

置信水平高，精确度低
精确度高，置信水平低

在例1中已得到

$(\bar{X}-2,\bar{X}+2)$是μ的置信水平为0.9544的置信区间

同理可得

$(\bar{X}-1,\bar{X}+1)$是μ的置信水平为0.6826的置信区间

相同的置信水平也可以得到不同的区间估计.
在这些区间估计中如何选择呢?

在例1中已得到

$(\bar{X}-2, \bar{X}+2)$是μ的置信水平为0.9544的置信区间

类似可计算得:

$(\bar{X}-1.89, \bar{X}+2.14)$是$\mu$的置信水平为0.9544的置信区间.

Neyman原则： 在置信水平达到$1-\alpha$的置信区间中，选精确度尽可能高的置信区间.

简单计算可得:

$(\bar{X}-2, \bar{X}+2)$的区间精度为4,

$(\bar{X}-1.89, \bar{X}+2.14)$的区间精度为4.03.

因此按照Neyman原则，在两者中应选择$(\bar{X}-2, \bar{X}+2)$作为置信区间.

在μ的置信水平为0.9544的置信区间中，还有没有比$(\bar{X}-2,\bar{X}+2)$精确度更高的置信区间呢?