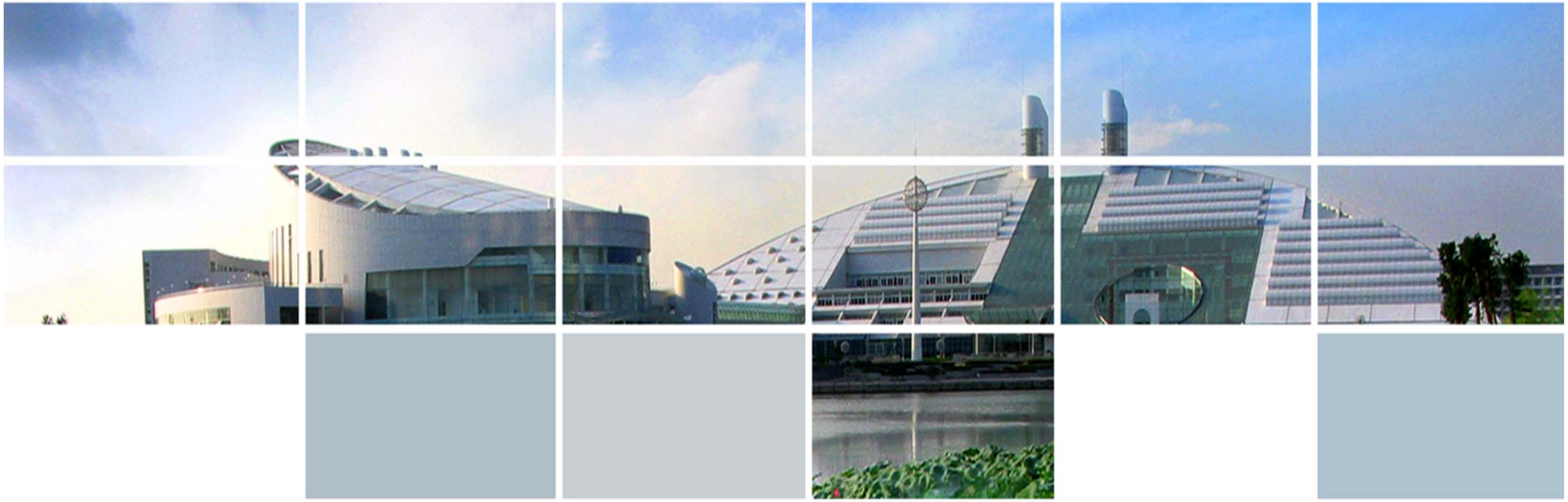
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第48讲　相合性

4. 相合性准则

定义： 设$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，

若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to+\infty$时，

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$$

即$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right\}=0$ 成立.

则称$\hat{\theta}_n$为θ的相合估计量或一致估计量.

例1：设总体X的k阶矩$E(X^k)=\mu_k(k\geq 2)$存在，$X_1,\cdots,X_n$是一样本，证明：

(1) $A_l=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$是$\mu_l$的相合估计，$l=1,\ldots,k$;

(2) B_2,S^2是$D(X)=\sigma^2$的相合估计；

(3) S是σ的相合估计.

证明:(1)由辛钦大数定律知, 对$l=1,\dots,k$,

$$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l\xrightarrow{P}\mu_l=E(X^l),$$

因此A_l是$E(X^l)$的相合估计.

特别地, $\overline{X}$是$\mu_1=E(X)$的相合估计,

A_2是$\mu_2=E(X^2)$相合估计.

(2)因为$D(X)=\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2$,

$$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=A_2-\bar{X}^2,$$

根据依概率收敛性质,

$B_2=A_2-\bar{X}^2$是σ^2的相合估计.

而$S^2=\dfrac{n}{n-1}B_2$也是σ^2的相合估计.

(3) $S=\sqrt{S^2}$是σ的相合估计.

例2：设总体$X \sim N(\mu,1), X_1,\cdots,X_n$是一样本，

$\hat{\mu} = X_n$，证明：$\hat{\mu}$不是μ的相合估计.

证明：$P\left\{\left|\hat{\mu}-\mu\right| \geq 1.6\right\} = 2(1-\Phi(1.6)) = 0.11$,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\mu}-\mu\right| \geq \varepsilon\right\} = 0 \text{ 不成立.}$$

所以，$\hat{\mu}$不是μ的相合估计.

例3：设总体$X \sim U[0,\theta]$，$X_1,\cdots,X_n$是一样本，

证明$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$和$\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$都是$\theta$的相合估计.

证明：$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} \xrightarrow{P} 2E(X) = \theta$,

$\Rightarrow \hat{\theta}_1$是$\theta$的相合估计.

$$E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta, \quad D\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

由切比雪夫不等式，$\forall \varepsilon>0$，当$n\to\infty$时，

$$0\le P\left\{\left|\hat{\theta}_2-\theta\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\left(\hat{\theta}_2\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}\to 0$$

所以$\hat{\theta}_2$也是θ的相合估计.