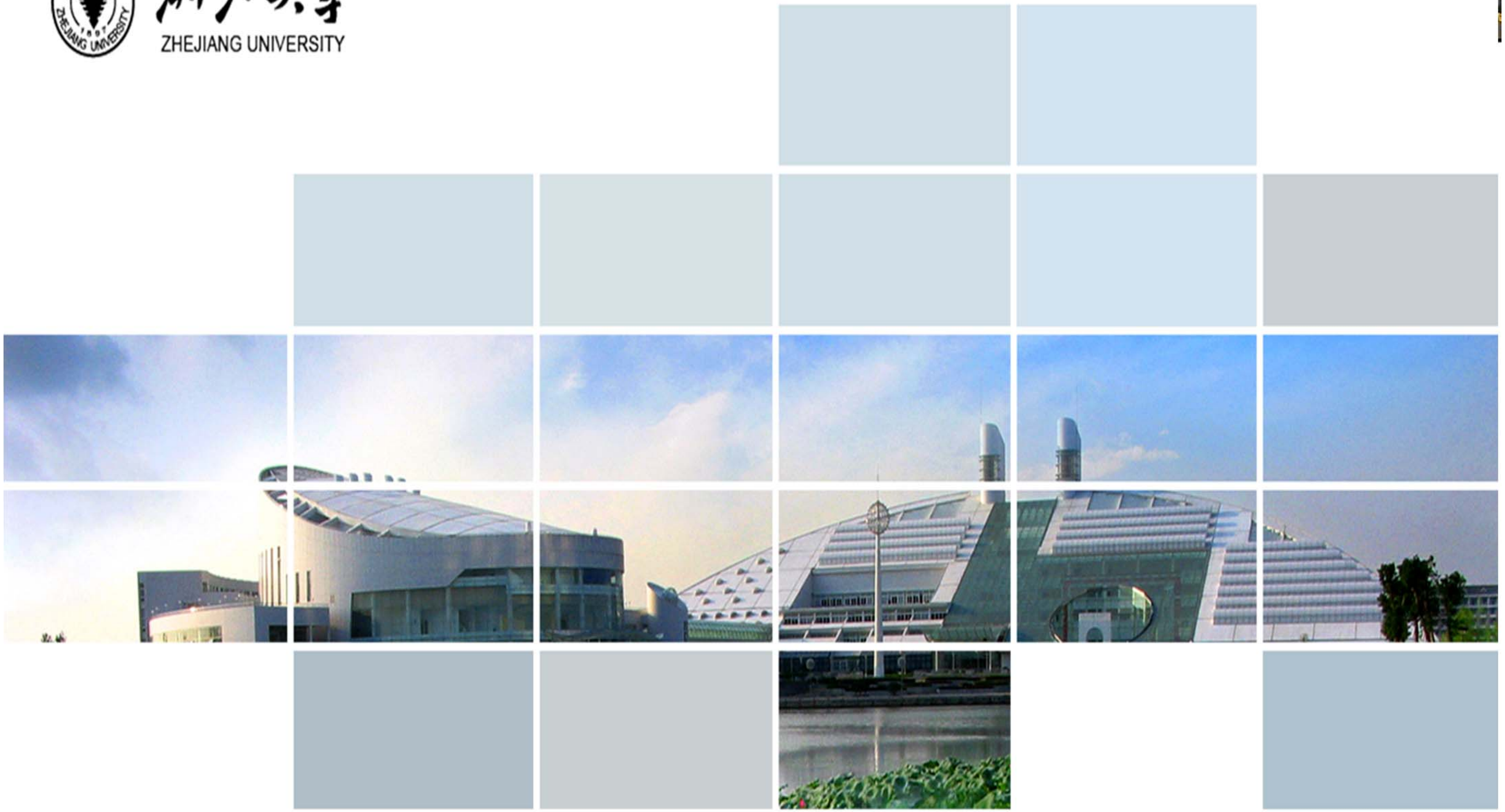
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第46讲 估计量的评价准则，无偏性

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

从前两讲看到，对总体的未知参数可用不同方法求得不同的估计量，如何评价不同估计量的好坏？

常用的评价准则有如下四条：

(1) 无偏性准则

(2) 有效性准则

(3) 均方误差准则

(4) 相合性准则

定义： 若参数θ的估计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)$,满足

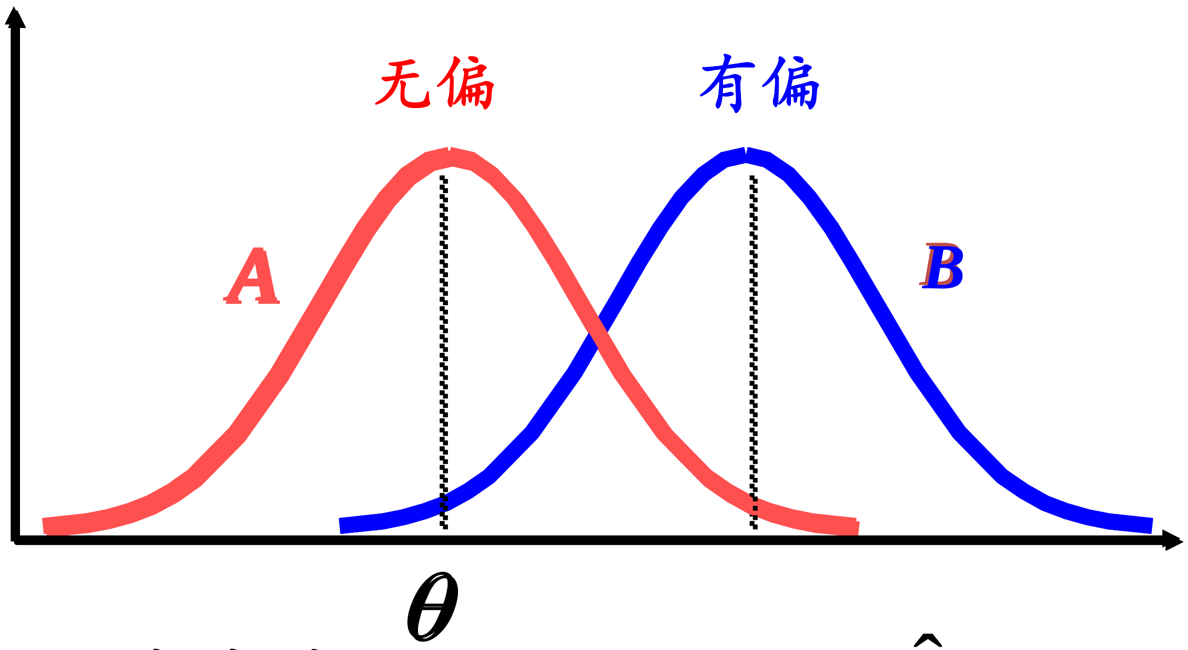
$$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的一个无偏估计量.

若$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta$,那么$\left|E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right|$称为估计量$\hat{\theta}$的偏差,

若$\lim\limits_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$,则称$\hat{\theta}$是$\theta$的渐近无偏估计量.

- 无偏性: $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$



若$\hat{\theta}_1$的概率密度如红线所示，则$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计.

若$\hat{\theta}_2$的概率密度如蓝线所示，则$\hat{\theta}_2$是θ的有偏估计.

无偏性的统计意义是指在大量重复试验下，

由$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$给出的估计的平均恰是$\theta$,

从而无偏性保证了$\hat{\theta}$没有系统误差.

例如，工厂长期为商家提供某种商品，假设生产过程相对稳定，产品合格率为θ，虽然一批货的合格率可能会高于θ，或低于θ，但无偏性能够保证在较长一段时间内合格率接近θ，所以双方互不吃亏。但作为顾客购买商品，只有二种可能，即买到的是合格品或不合格品，此时无偏性没有意义。

例1： 设总体X的一阶和二阶矩存在，

$$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2.$$

(1)证明：样本均值$\overline{X}$和样本方差S^2分别是

μ和σ^2的无偏估计；

(2)判断：B_2是否为σ^2的无偏估计？

是否为σ^2的渐近无偏估计？

(1)证：因$X_1, X_2, \cdots, X_n$与X同分布，故有：

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

故$\bar{X}$是μ的无偏估计.

$E(S^2) = \sigma^2$ ——见第42讲例2

故S^2是σ^2的无偏估计.

$$(2)B_2=\frac{n-1}{n}S^2$$

$$E(B_2)=\frac{n-1}{n}E\left(S^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

故B_2不是σ^2的无偏估计.

$$\lim_{n\to\infty}E(B_2)=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

故B_2是σ^2的渐近无偏估计.

例2：设总体X服从均匀分布$U(0,\theta)$，θ是未知参数，样本$X_1,\cdots,X_n$.

(1)求θ的矩估计，判断是否无偏；

(2)求θ的极大似然估计，判断是否无偏.

(1) 矩估计:

由$\mu_1 = E(X) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} x dx = \frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \theta = 2\mu_1 \Rightarrow \theta$的矩估计$\hat{\theta} = 2\overline{X}$

因为$E(\hat{\theta}) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E(\overline{X}) = 2E(X) = \theta,$

所以$\hat{\theta} = 2\overline{X}$是$\theta$的无偏估计.

(2) 极大似然估计：

X的概率密度

$$f_X(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$\Rightarrow L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1,\cdots,x_n\le\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$L(\theta)$关于$\theta>0$递减，

而θ的范围为：$\theta\ge x_{(n)}=\max\{x_1,\ldots,x_n\}$，

所以，θ的极大似然估计量

$$\hat{\theta}_L=X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

根据第26讲，$X_{(n)}$的分布函数为

$$F_{X_{(n)}}(x)=\left[F(x)\right]^n=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta,\\ 1, & x>\theta.\end{cases}$$

求导数得密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0\le x\le\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此有:

$$E\left(\hat{\theta}_L\right)=E\left(X_{(n)}\right)=\int_0^{\theta}\frac{x\cdot nx^{n-1}}{\theta^n}dx$$

$$=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

所以$\hat{\theta}_L=X_{(n)}$作为参数θ的估计是有偏的.

➢ 纠偏方法

如果$E\left(\hat{\theta}\right)=a\theta+b,\theta\in\Theta$,其中$a,b$是常数, 且$a\neq 0$,

则$\frac{1}{a}\left(\hat{\theta}-b\right)$是$\theta$的无偏估计.

在上例中，$E(X_{(n)})=\dfrac{n}{n+1}\theta$,

取$X_{(n)}^{*}=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$,则$X_{(n)}^{*}$是$\theta$的无偏估计.