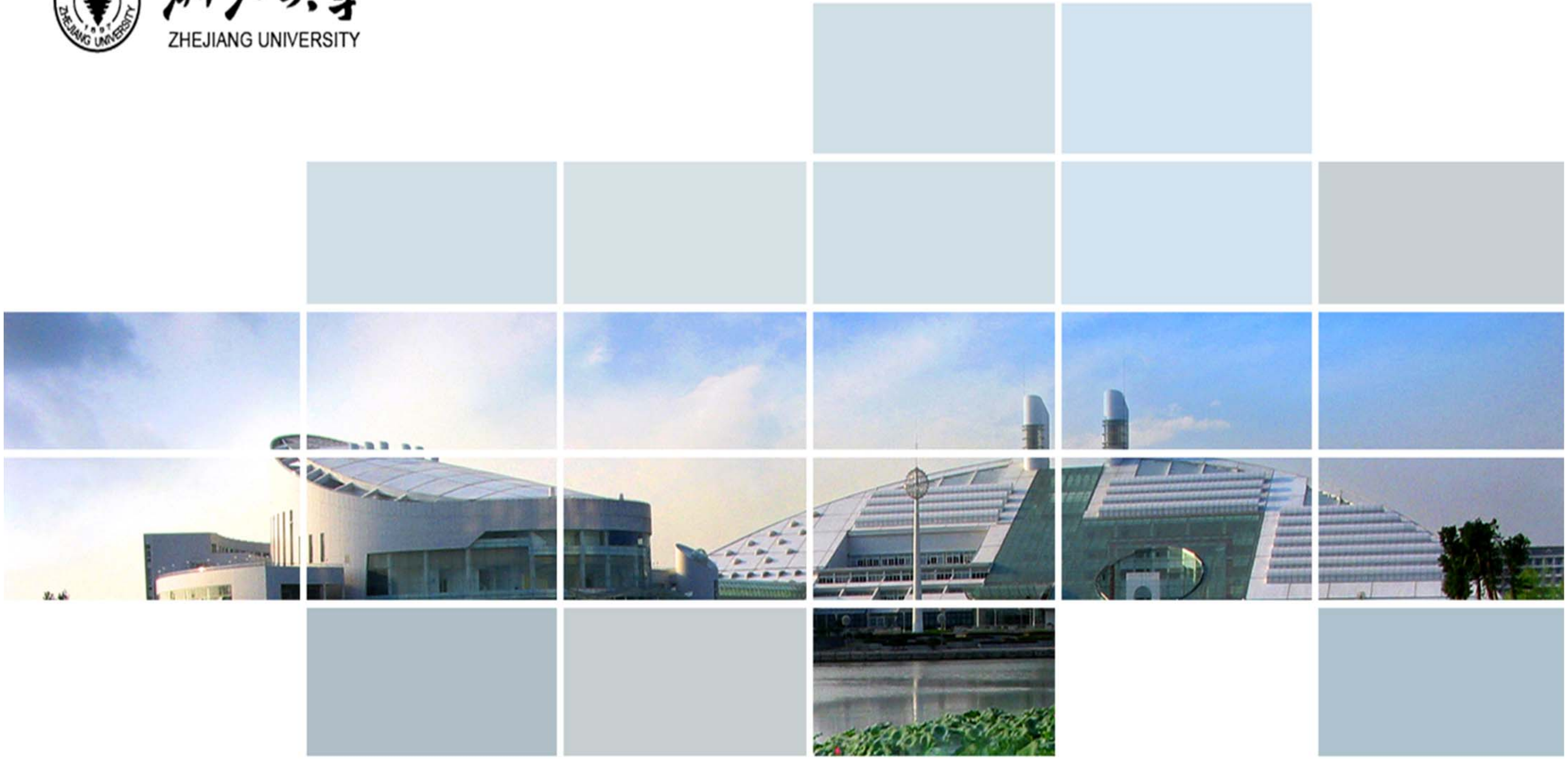
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY



第44讲　矩估计

参数：反映总体某方面特征的量

比如：合格率，均值，方差，中位数…

参数估计的形式：点估计和
区间估计

例如：天气预报

明天的最高温度：12℃. ——点估计

明天的最高温度：11℃ —13℃.——区间估计

设总体X有未知参数$\theta, X_1,\cdots, X_n$是总体X的简单随机样本.

点估计：构造合适的统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots, X_n)$用来估计未知参数$\theta$，$\hat{\theta}$称为参数$\theta$的点估计量.

当给定样本观察值$x_1,\cdots, x_n$时，$\hat{\theta}(x_1,\cdots, x_n)$称为参数$\theta$的点估计值。

- 常用的点估计方法：

矩估计法、极大似然估计法.

例1：某大学新生有4千人参加第一学期末的《微积分》考试. 现随机选出100名学生, 计算得他们的平均成绩为72.3分, 标准差为15.8分. 试估计全部学生的平均成绩.

- 记总体（4000个学生成绩）的均值为μ，则μ的估计值为72.3分.
- μ：总体一阶矩，72.3分:样本一阶矩的观测值
- 用样本矩作为总体矩的估计即为**矩估计**

（一）矩估计法

统计思想: 以样本矩估计总体矩, 以样本矩的函数估计总体矩的函数.

理论根据: 辛钦大数定律和依概率收敛的性质.

假设$\mu_j = E(X^j)$存在, $j = 1,\ldots,k$.

则
$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{\mu}_j = A_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j,\ j = 1,\ldots,k, \\ &h(\mu_1,\cdots,\mu_k)^{\wedge} = h(A_1,\cdots,A_k)\end{aligned}}\ \begin{aligned}&\xrightarrow{P} \mu_j,\ j = 1,\cdots,\mu_k \\ &\xrightarrow{P} h(\mu_1,\cdots,\mu_k)\end{aligned}$$

设总体有k个未知参数$\theta_1, \ldots, \theta_k$, $X_1,\ldots,X_n$是来自总体X的样本，假设总体的前k阶矩存在.

矩估计步骤：

（1）建立$(\theta_1,\cdots,\theta_k)$与$(\mu_1,\cdots,\mu_k)$的联系：

求总体前k阶矩关于k个参数的函数，

$$\mu_i = E(X^i) = h_i(\theta_1,\cdots,\theta_k), \qquad i = 1,\cdots,k.$$

(2)求各参数关于k阶矩的反函数，

$$\theta_i = g_i(\mu_1,\cdots,\mu_k), \qquad i = 1,\cdots,k$$

(3) 以样本各阶矩$A_1,\cdots,A_k$代替总体X各阶矩$\mu_1,\cdots,\mu_k$，得各参数的矩估计

$$\hat{\theta}_i = g_i(A_1,\cdots,A_k), \qquad i=1,\cdots,k.$$

在实际应用时,为求解方便,也可用总体中心矩ν_i替换总体原点矩μ_i,相应地，以样本中心矩B_i估计总体中心矩ν_i.

采用的矩不同，得出的矩估计也可能不同。

例1续，求例1中总体标准差σ的矩估计值.

解：$\mu_1 = E(X) = \mu$

$\mu_2 = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu = \mu_1, \\ \sigma = \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}. \end{cases}$$

$$B_2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x} = 72.3, \\ \hat{\sigma} = \sqrt{A_2 - \bar{X}^2} = \sqrt{B_2} = \sqrt{\dfrac{99}{100} \times 15.8^2} = 15.7. \end{cases}$$

矩估计不涉及总体分布.

例2: 设总体$X \sim B(1, p)$, p未知， $X_1, \cdots, X_n$是总体X的样本. 求p的矩估计量.

解: $\mu_1 = EX = p$,

$$\therefore\ p = \mu_1$$

$$\therefore\ \hat{p} = \overline{X}$$

即用样本比例来估计总体比例.

应用: 一个很大的罐子里装满了糖,如何估计糖的数目n?

解:从罐子里取k颗糖,做上记号,再放回罐子中,然后有放回取m颗.设取到做记号的糖数为k_1.则

带记号的糖的总体比例为$\dfrac{k}{n}$,样本比例为$\dfrac{k_1}{m}$.

$$\therefore \frac{k}{\hat{n}} = \frac{k_1}{m} \Rightarrow \hat{n} = k\frac{m}{k_1}.$$

类似方法可以估计池塘里鱼的数目,森林里某动物的数目等.

例3: 设总体X的密度为: $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1} & 0\le x\le 1;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

$\theta>0$未知, $X_1,\ldots,X_n$为样本，求θ的矩估计量.

若已获得$n=10$的样本值如下，

0.43	0.01	0.30	0.04	0.54
0.14	0.99	0.18	0.98	0.02

求θ的矩估计值.

解:(1) $\mu_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}} dx = \dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$

(2) $\theta = \left(\dfrac{\mu_1}{1-\mu_1} \right)^2$

(3)矩估计量: $\hat{\theta} = \left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \right)^2$

(4) $\bar{x} = 0.363$,矩估计值 $\hat{\theta} = \left(\dfrac{0.363}{1-0.363} \right)^2 = 0.325$

例4: 设总体X服从均匀分布$U(a,b)$, a,b未知.

$X_1,\ldots,X_n$为样本, 求a,b的矩估计量.

解:(1)求矩关于参数的函数

$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \nu_2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

(2) 求参数关于矩的反函数

$$a = \mu_1 - \sqrt{3\nu_2}, b = \mu_1 + \sqrt{3\nu_2}$$

(3)以样本矩$A_1 = \overline{X}$代替总体矩μ_1,

$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$代替$\nu_2$,

得参数a和b的矩估计量：

$$\hat{a} = \overline{X} - \sqrt{3B_2}, \quad \hat{b} = \overline{X} + \sqrt{3B_2}.$$