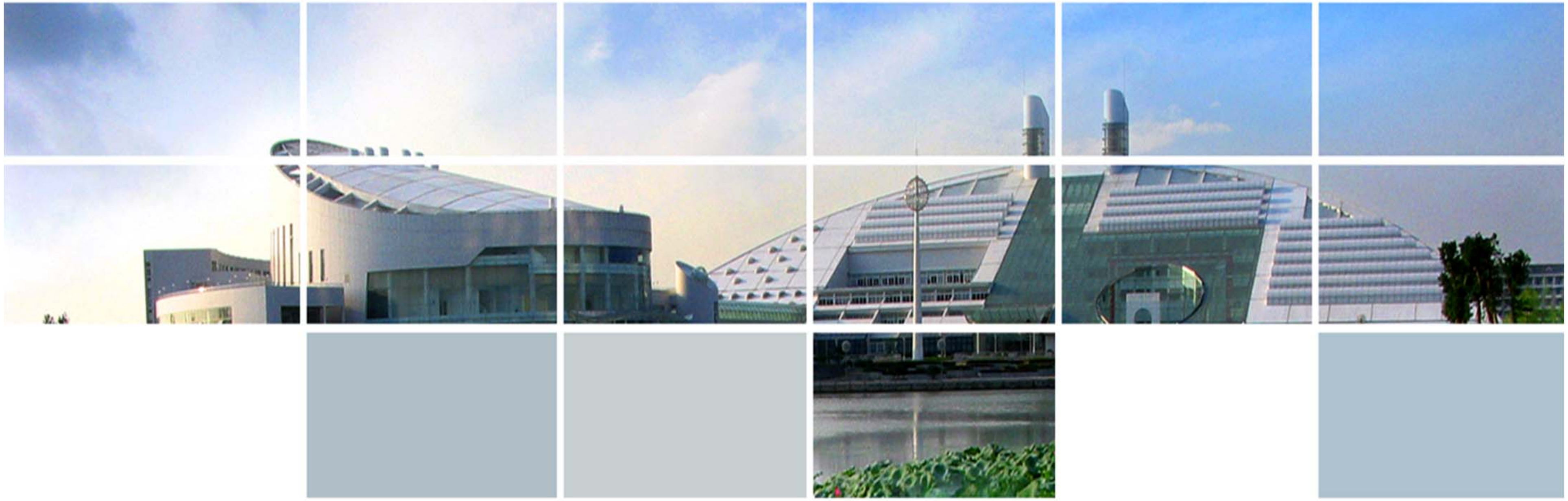
浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY



第41讲　　t分布与F分布

t 分布

定义: 设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$,

且X和Y相互独立.

则称随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为n的t分布.

(也称为学生氏分布)

记为 $T \sim t(n)$.

William Gosset
(1876-1937)
1908年提出t-分布

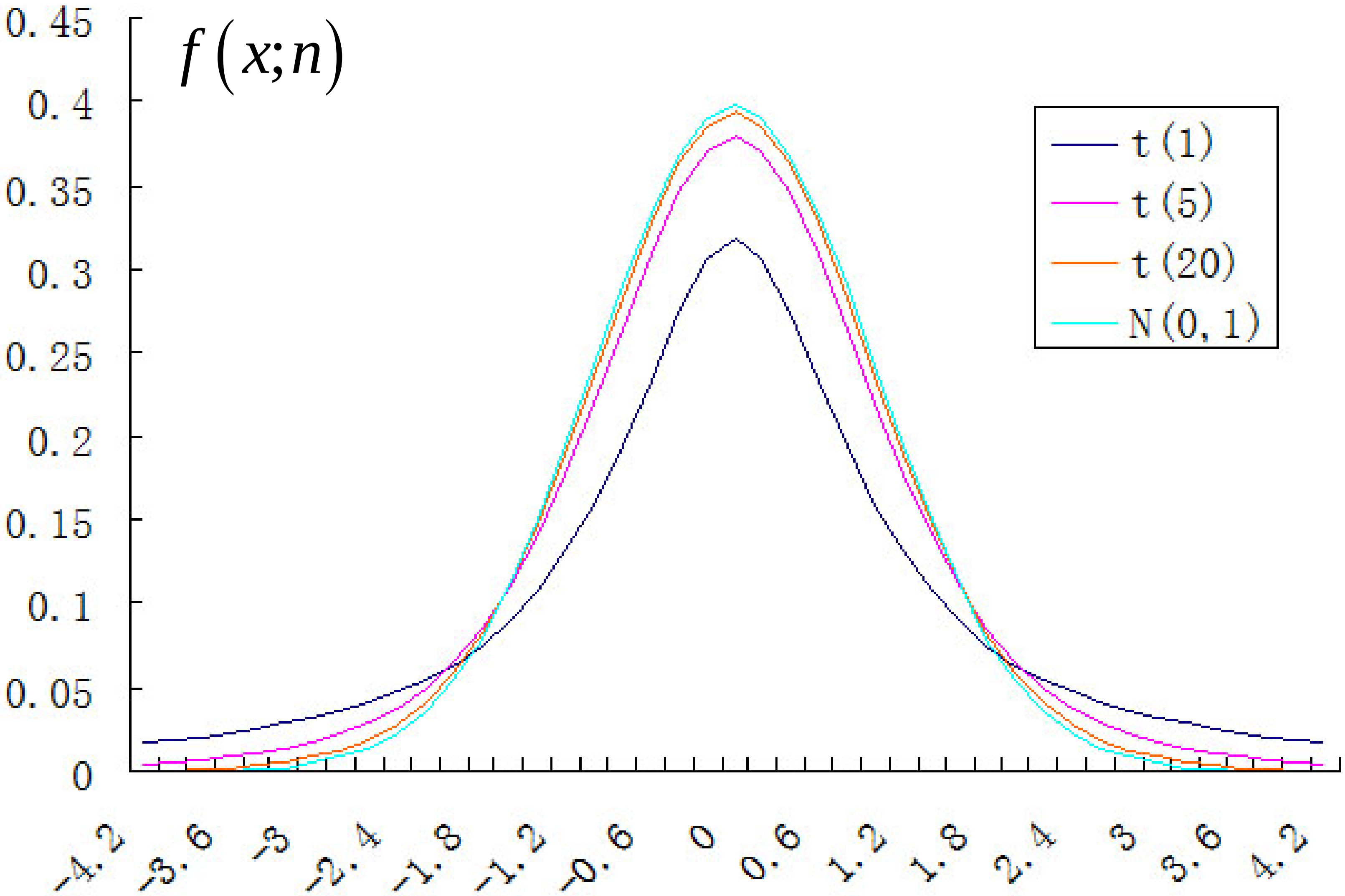
$t(n)$分布的概率密度为：

$$f(x;n)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},-\infty<x<+\infty$$

特别地，$n=1$的t分布就是柯西分布.

$$f(x;1)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},-\infty<x<+\infty$$

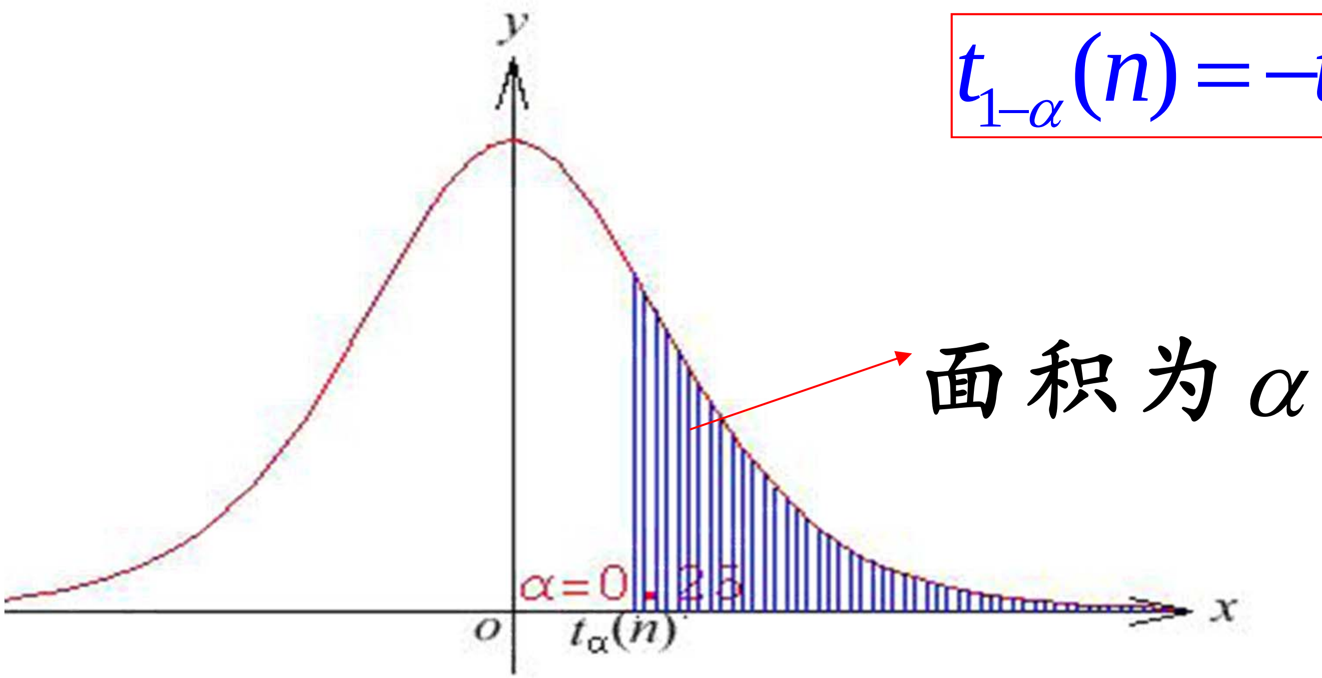
$$n\to\infty, f(x;n)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},-\infty<x<+\infty$$


$f(x;n)$
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
t(1)
t(5)
t(20)
N(0,1)
-4.2
-3.6
-3
-2.4
-1.8
-1.2
-0.6
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3
3.6
4.2

$t(n)$分布概率密度函数

给定α, $0<\alpha<1$,称满足条件$\int_{t_\alpha(n)}^{\infty} f(x;n)dx=\alpha$的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上$\alpha$分位数. $t_\alpha(n)$可查t分布表(或用Excel计算，具体见实验12的演示).

$$\boxed{t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)}$$



F分布

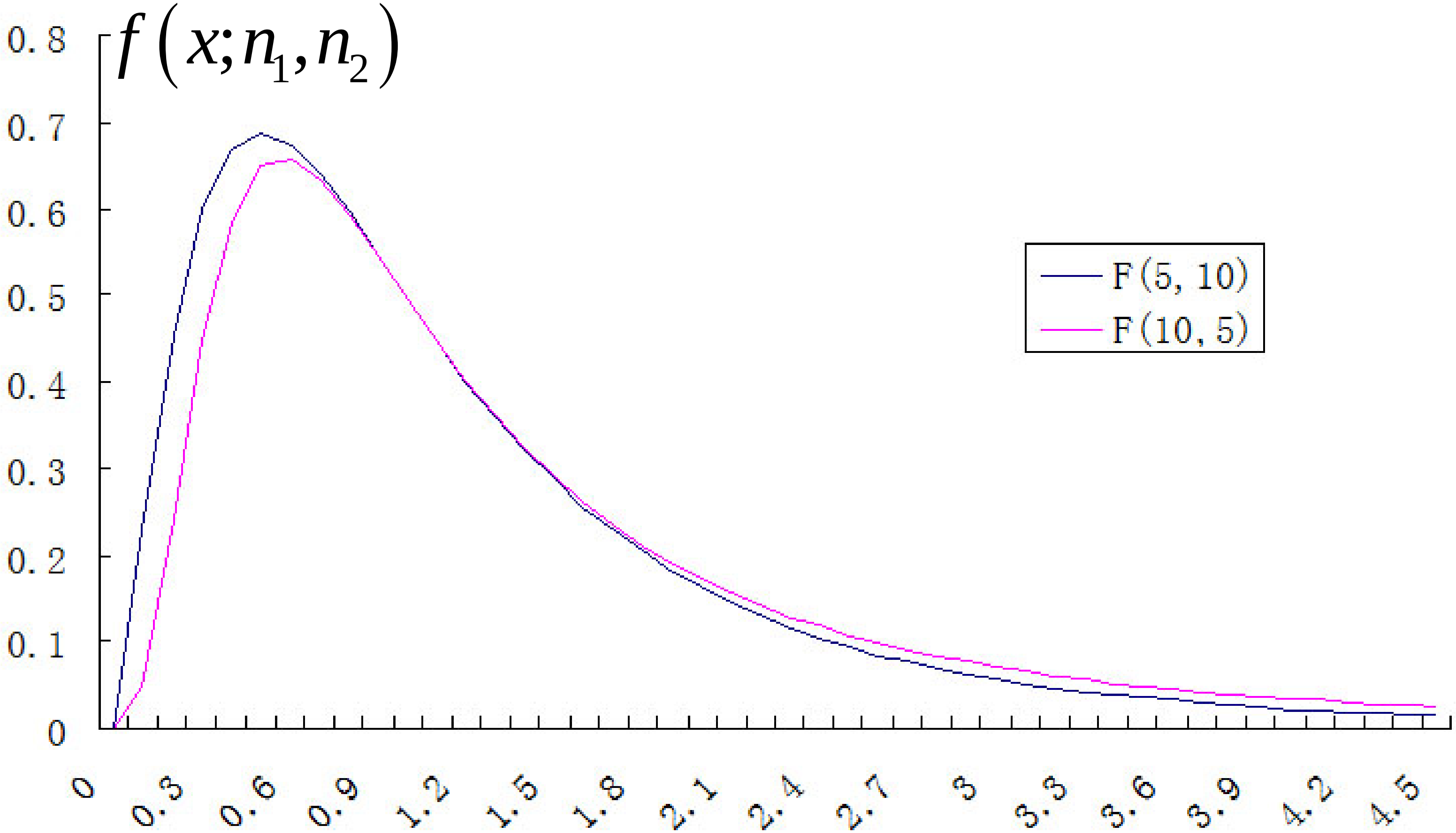
定义: 设$X\sim\chi^2(n_1)$,$Y\sim\chi^2(n_2)$, 且X,Y独立, 则称随机变量$F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度为(n_1,n_2)的F分布，记为$F\sim F(n_1,n_2)$,其中n_1称为第一自由度, n_2称为第二自由度.

性质: 若$F\sim F(n_1,n_2)$,则$\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$.

$F(n_1,n_2)$分布的概率密度为：

$$f(x;n_1,n_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{B\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_2}{2}\right)}n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(n_2+n_1x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中, $B(a,b)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{b-1}dx=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.



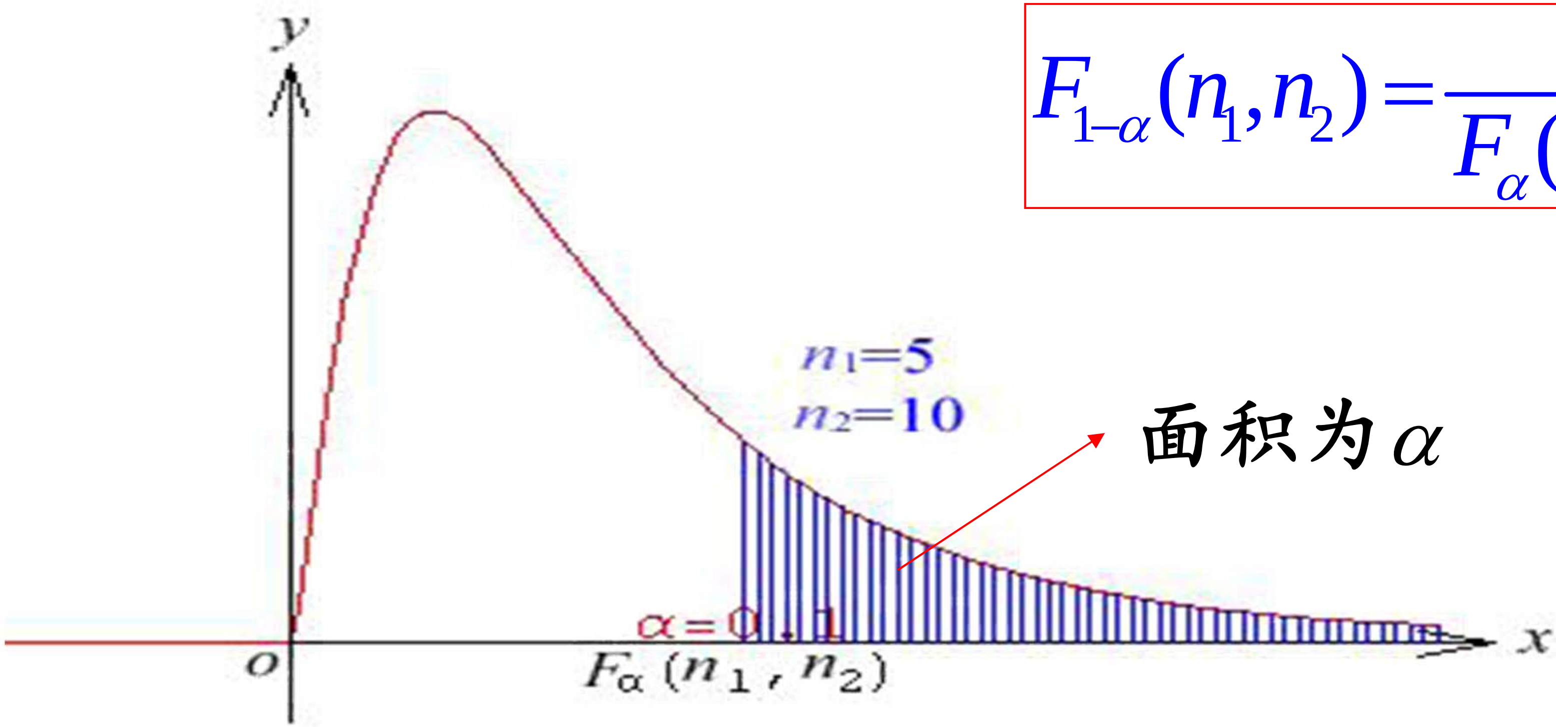
$F(n_1,n_2)$分布概率密度函数

给定 $0<\alpha<1$,称满足条件$\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{\infty} f(x;n_1,n_2)dx=\alpha$

的点$F_\alpha(n_1,n_2)$为$F(n_1,n_2)$分布的上α分位数.

$F_\alpha(n_1,n_2)$可查F分布表(或用Excel计算,见实验12).

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$



面积为α

例: X,Y,Z相互独立，均服从$N(0,1)$，则

(1) $X^2+Y^2+Z^2 \sim \chi^2(3)$;

(2) $\dfrac{X}{\sqrt{(Y^2+Z^2)/2}} \sim t(2)$;

(3) $\dfrac{2X^2}{Y^2+Z^2} \sim F(1,2)$.

若$t \sim t(n)$，则 $t^2 \sim F(1,n)$.