第40讲 χ^2分布

- 在数理统计中，用于描述抽样分布的分布函数，除了正态分布外，最重要的三个分布分别为：

  χ^2分布　t分布　F分布

- 下面分别给出这三个分布的定义，密度函数，图形，性质和分位数等等。

χ^2 分布

定义：设随机变量$X_1,\cdots,X_n$相互独立, 都服从$N(0,1)$,

则称 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ (1)

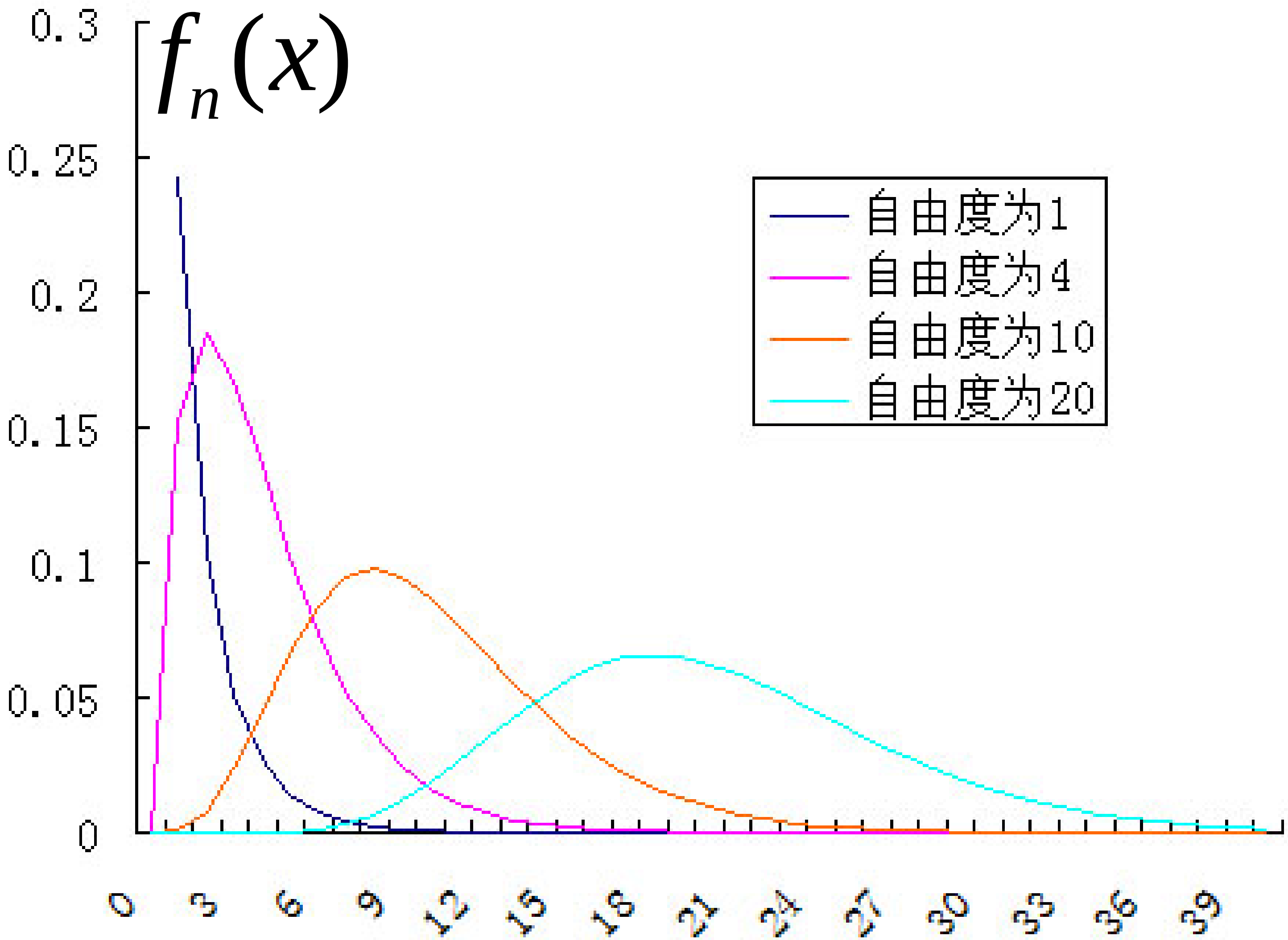
服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$

自由度指(1)式右端包含的独立变量的个数.

$\chi^2(n)$分布的概率密度为：

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\Gamma(n/2)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$



χ^2分布的概率密度函数

性质：

1.设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则$E(\chi^2)=n, D(\chi^2)=2n.$

2. χ^2分布的可加性:

$$\boxed{\chi^2=\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

设$Y_1 \sim \chi^2(n_1), Y_2 \sim \chi^2(n_2)$,且$Y_1, Y_2$相互独立，则

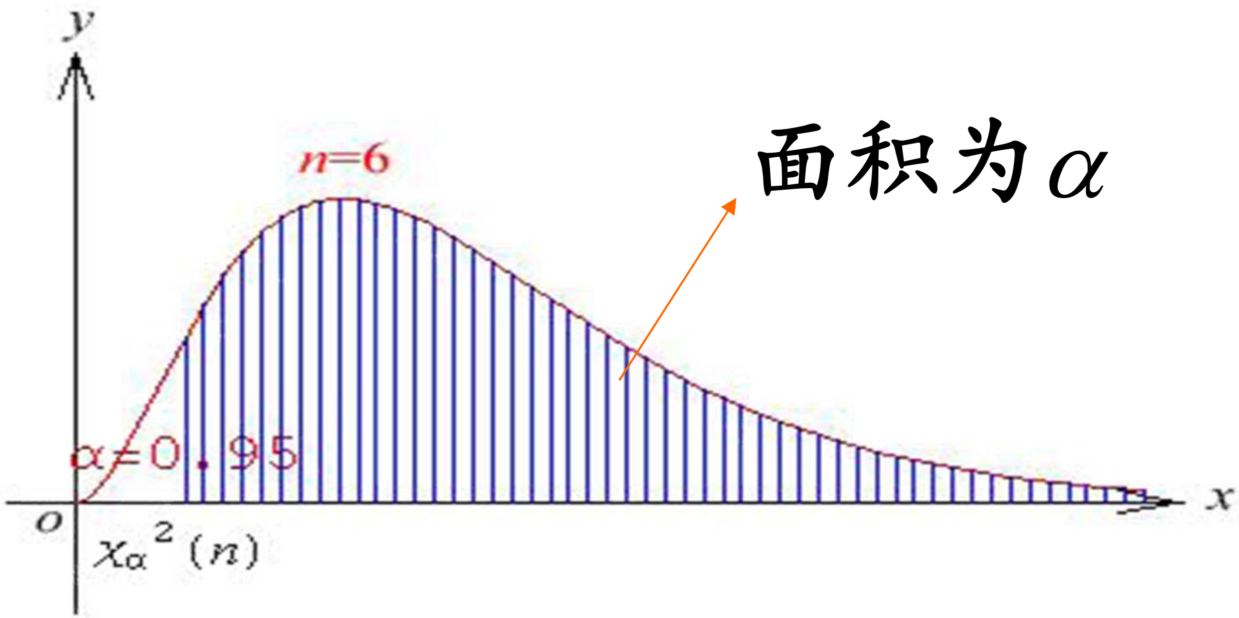
$$Y_1+Y_2 \sim \chi^2(n_1+n_2).$$

可推广到有限个随机变量的情形，

设$Y_1,\ldots,Y_m$相互独立，$Y_i \sim \chi^2(n_i)$,则 $\sum_{i=1}^{m} Y_i \sim \chi^2(\sum_{i=1}^{m} n_i).$

给定$\alpha, 0<\alpha<1$,称满足条件$P(\chi^2>\chi_\alpha^2(n))=\alpha$的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上$\alpha$分位数.

$\chi_\alpha^2(n)$的值可查χ^2分布表(也可以通过Excel得到,具体内容在下一讲实验12进行演示).



例1：设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right),\mu,\sigma^2$ 已知.

$\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)$是取自总体$X$的样本.

求统计量 $\chi^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 的分布.

解：作变换 $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma} \quad i = 1, 2, \cdots, n$

则$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$相互独立，且$Y_i \sim N(0,1) \quad i = 1, 2, \cdots, n$

于是 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \sim \chi^2(n).$