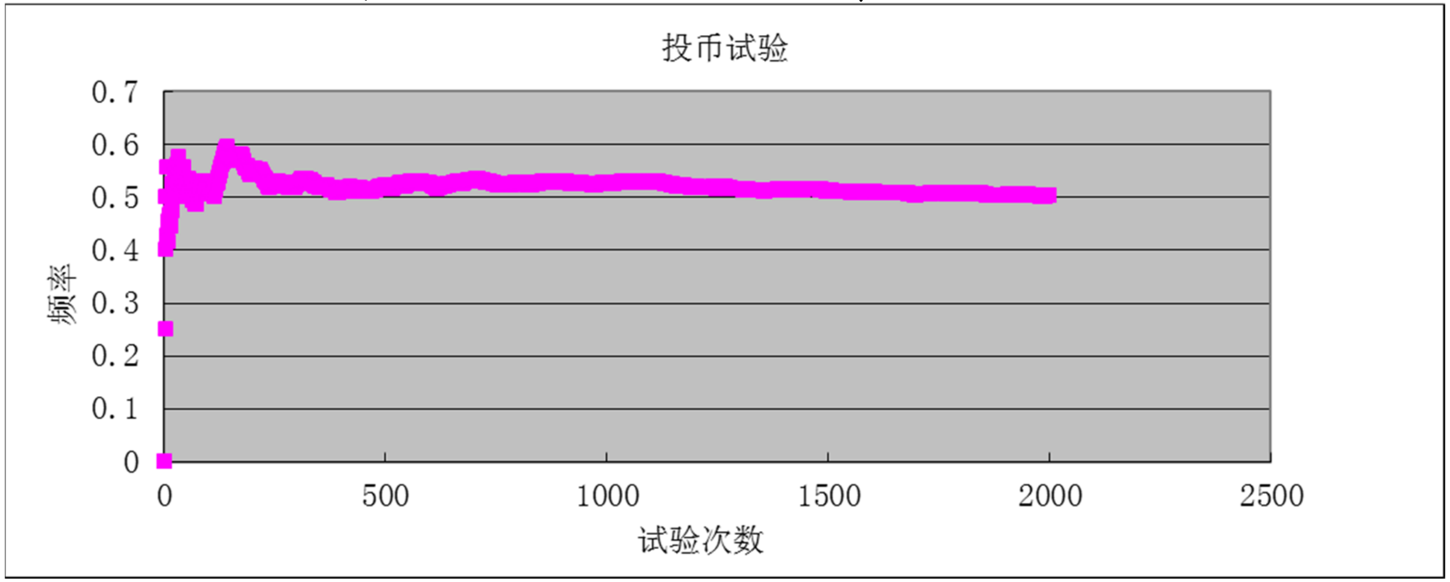
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第4讲　概　率

- 例：上一讲提到的抛硬币出现正面的频率.



从中看出频率 $f_n(H)$ 随n的增大渐趋稳定，存在一个稳定值.

定义1　　概率的统计性定义：

当试验的次数增加时，随机事件A发生的频率的稳定值p称为概率. 记为P(A)=p.

定义2 (概率的公理化定义):

设随机试验对应的样本空间为S.

对每个事件A,定义$P(A)$,满足:

1.非负性: $P(A)\geq 0$;

2.规范性: $P(S)=1$;

3.可列可加性:

$A_1,A_2,\ldots$两两互斥,

即$A_iA_j=\varnothing, i\neq j$,

则$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

称$P(A)$为事件A的概率.

性质：$1^\circ \ P(\varnothing)=0$

$2^\circ \ P(A)=1-P(\bar{A})$

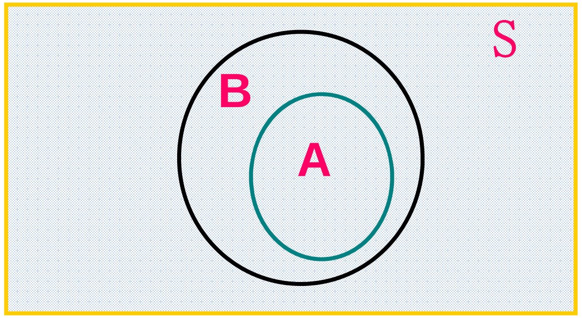
3°（有限可加性）

$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_iA_j=\varnothing, i\neq j,$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

4° 若$A \subset B$, 则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

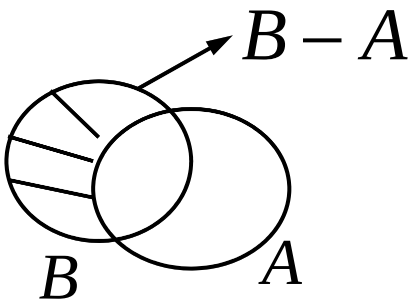
证: $B = A \cup (B-A)$ 不交并



$\Rightarrow P(B)=P(A)+P(B-A)$

$\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

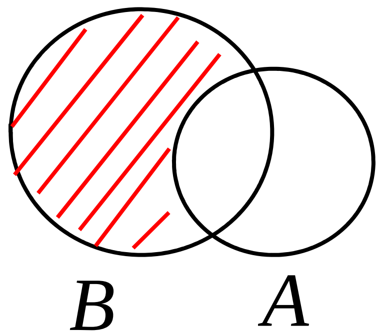
$\Rightarrow P(B)\ge P(A)$,于是有 $P(A)\le P(S)=1.$



一般情况下 $P(B-A)=\ ?P(B)-P(AB)$

5° 概率的加法公式：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



证：$A \cup B = A \cup (B - A)$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

#5°的推广1：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

证：$P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A\cup B)+P(C)-P(AC\cup BC)$$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

#5°的推广2(一般情形）：

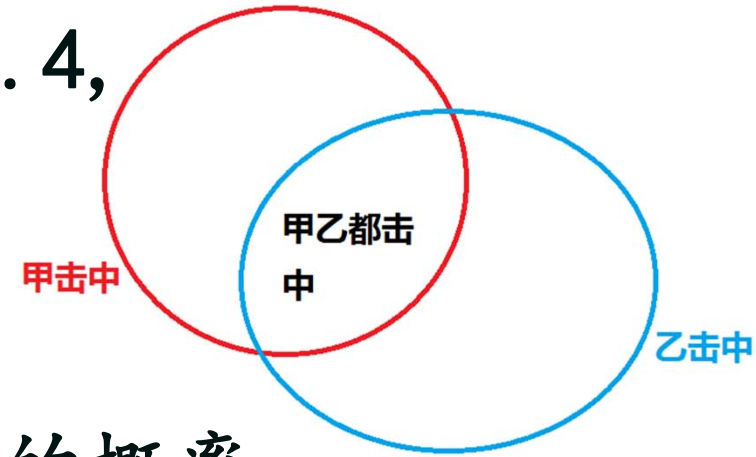
$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例1：设甲、乙两人向同一目标进行射击,已知甲击中的概率为0.7，乙击中目标的概率为0.6，两人同时击中目标的概率为0.4，

求(1)目标不被击中的概率；

(2)甲击中目标而乙未击中的概率.



解： 设$A=\{$甲击中目标$\}$, $B=\{$乙击中目标$\}$, 则

$P(A)=0.7, P(B)=0.6, P(AB)=0.4.$

而{目标不被击中}=$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$,

{甲击中目标而乙未击中}=$A\overline{B}=A-AB$,所以

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=0.1,$$

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.7-0.4=0.3.$$