



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第34讲 矩、协方差矩阵、 多元正态分布的性质



■ 主题概述:

- 1、矩
- 2、多元随机变量的数字特征
(数学期望与协方差矩阵)
- 3、多元正态分布的概率密度
- 4、多元正态分布的四条性质



定义1: X 为一个随机变量,

若 $E(X^k)$, $k=1,2,\dots$ 存在,

则称之为 X 的 k 阶(原点)矩;

若 $E\{[X - E(X)]^k\}$, $k=1,2,\dots$ 存在,

则称之为 X 的 k 阶中心矩.

之前所提到的随机变量的期望和方差就是其1阶原点矩和2阶中心矩.



定义2: X 与 Y 为两个随机变量,

若 $E\{X^k Y^l\}$, $k, l = 1, 2, \dots$ 存在,

则称之为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合(原点)矩;

若 $E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\}$, $k, l = 1, 2, \dots$ 存在,

则称之为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

之前所提到的随机变量的协方差就是其1+1阶混合中心矩.



定义3: 设 n 元随机变量 $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 若其每一分量的数学期望都存在, 则称

$$E(\tilde{X}) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))^T, \quad n \geq 1,$$

为 n 元随机变量 \tilde{X} 的数学期望(向量).



定义4: 设 n 元随机变量 $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 若 $Cov(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ 都存在, 则称

$$C = Cov(\tilde{X}) = \begin{pmatrix} D(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & D(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & D(X_n) \end{pmatrix}$$

为 n 元随机变量 \tilde{X} 的协方差矩阵. (是对称非负定矩阵)

即: $C = (c_{ij})_{n \times n}$, $c_{ij} = Cov(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.



■ n 元正态随机变量的联合概率密度的矩阵表示

引入列向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\tilde{\mu} = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))^T$,

协方差矩阵为 $C = (c_{ij})_{n \times n}$, $c_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

则 n 元正态随机变量 $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 其联合概率密度为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \tilde{\mu})^T C^{-1} (x - \tilde{\mu}) \right\}.$$



■ n 元正态随机变量的四条重要性质

1. n 元正态随机变量 $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 其任意子向量 $(X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k})^T$ ($1 \leq k \leq n$) 均服从 k 元正态分布.

特别地, 其中的每一个分量 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, 都是一元正态变量.

反之, 若 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, 均为一元正态变量, 且相互独立, 则

$\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 是 n 元正态随机变量.

如: $\tilde{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ 为3元正态随机变量, 则

$(X_1, X_2)^T, (X_1, X_3)^T, (X_2, X_3)^T$ 均为二元正态变量.



■ n 元正态随机变量的四条重要性质

2. n 元随机变量 $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 服从 n 元正态分布

$\Leftrightarrow X_1, X_2, \dots, X_n$ 的任意线性组合 $l_0 + l_1X_1 + l_2X_2 + \dots + l_nX_n$

均服从一元正态分布, 其中 l_1, l_2, \dots, l_n 不全为0.

如: $\tilde{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ 为3元正态随机变量, 则

$$3X_1 - X_2, 2X_1 + 4X_3 + 1, X_2 - 3X_1 - X_3 - 2$$

均为一元正态变量.



■ n 元正态随机变量的四条重要性质

3. n 元正态随机变量 $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 若 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, k \geq 1$, 均为 $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, 的线性函数, 则 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)^T$ 也服从 k 元正态分布.

这一性质称为正态变量的线性变换不变性.

如: $\tilde{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ 为3元正态随机变量, 则

$$(3X_1 - X_2, 2X_1 + 4X_3 + 1, X_2 - 3X_1 - X_3 - 2, X_2)^T$$

服从4元正态分布.



■ n 元正态随机变量的四条重要性质

4. 设 $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $n \geq 1$, 服从 n 元正态分布, 则

X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立

$\Leftrightarrow X_1, X_2, \dots, X_n$ 两两不相关

$\Leftrightarrow \tilde{X}$ 的协方差矩阵为对角矩阵.

$$C = \begin{pmatrix} D(X_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(X_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(X_n) \end{pmatrix}$$



例1: 设随机变量 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(0, 1; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 求:

(1) $D(2X - Y)$; (2) $P(2X > Y)$; (3) (Z_1, Z_2) 的分布, $Z_1 = X + Y, Z_2 = X - Y$.

解: 由题意知: $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 4), \rho_{XY} = -\frac{1}{2}$.

$$(1) \text{ 由于 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}},$$

$$\text{从而 } \text{Cov}(X, Y) = \rho_{XY} \sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)} = -\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } D(2X - Y) &= D(2X) + D(-Y) + 2\text{Cov}(2X, -Y) \\ &= 4D(X) + D(Y) - 4\text{Cov}(X, Y) \\ &= 4 \times 1 + 4 - 4 \times (-1) = 12. \end{aligned}$$



(2) $(X, Y) \sim N(0, 1; 1, 4; \frac{-1}{2})$, 求: $P(2X > Y)$;

想到 $P(2X > Y) = \iint_{2x > y} f(x, y) dx dy$, ——不可行!!

由于 $P(2X > Y) = P(2X - Y > 0)$,

根据多元正态的性质2, 由于 (X, Y) 服从二元正态分布, 故其分量的任意线性组合服从一元正态, 即可得, $2X - Y \sim N(-1, 12)$.

故 $P(2X > Y) = P(2X - Y > 0)$

$$= P\left(\frac{2X - Y - (-1)}{\sqrt{12}} > \frac{0 - (-1)}{\sqrt{12}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

$E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y)$



(3) $(X, Y) \sim N(0, 1; 1, 4; \frac{-1}{2})$, 求: (Z_1, Z_2) 的分布, $Z_1 = X + Y, Z_2 = X - Y$.

根据多元正态的性质3, 即正态变量的线性变换不变性, 可知 (Z_1, Z_2) 也服从二元正态分布.

$$E(Z_1) = E(X) + E(Y) = 1; \quad E(Z_2) = E(X) - E(Y) = -1;$$

$$D(Z_1) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y) = 1 + 4 + 2 \times (-1) = 3;$$

$$D(Z_2) = D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2Cov(X, Y) = 1 + 4 - 2 \times (-1) = 7;$$

$$\rho_{Z_1 Z_2} = \frac{Cov(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}} = \frac{Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y)}{\sqrt{3 \times 7}}$$

$$= \frac{1 - 4}{\sqrt{3 \times 7}} = -\sqrt{\frac{3}{7}};$$

$$\text{则 } (Z_1, Z_2) \sim N(1, -1; 3, 7; -\sqrt{\frac{3}{7}}).$$



例2: 设随机变量 (X, Y) 服从二元正态分布, $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(2, 4)$, 且两分量独立, 求: (X, Y) 的分布及 $Cov(2X - Y, X - 2Y)$, $E(XY)$.

解: 根据多元正态的性质4, 知两分量是不相关的, 故

$$(X, Y) \sim N(1, 2; 1, 4; 0).$$

从而 $Cov(2X - Y, X - 2Y)$

$$= Cov(2X, X) + Cov(2X, -2Y) + Cov(-Y, X) + Cov(-Y, -2Y)$$

$$= 2D(X) + 0 + 0 + 2D(Y) = 2 \times 1 + 2 \times 4 = 10.$$

再次利用分量的不相关性, 可知

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 1 \times 2 = 2.$$