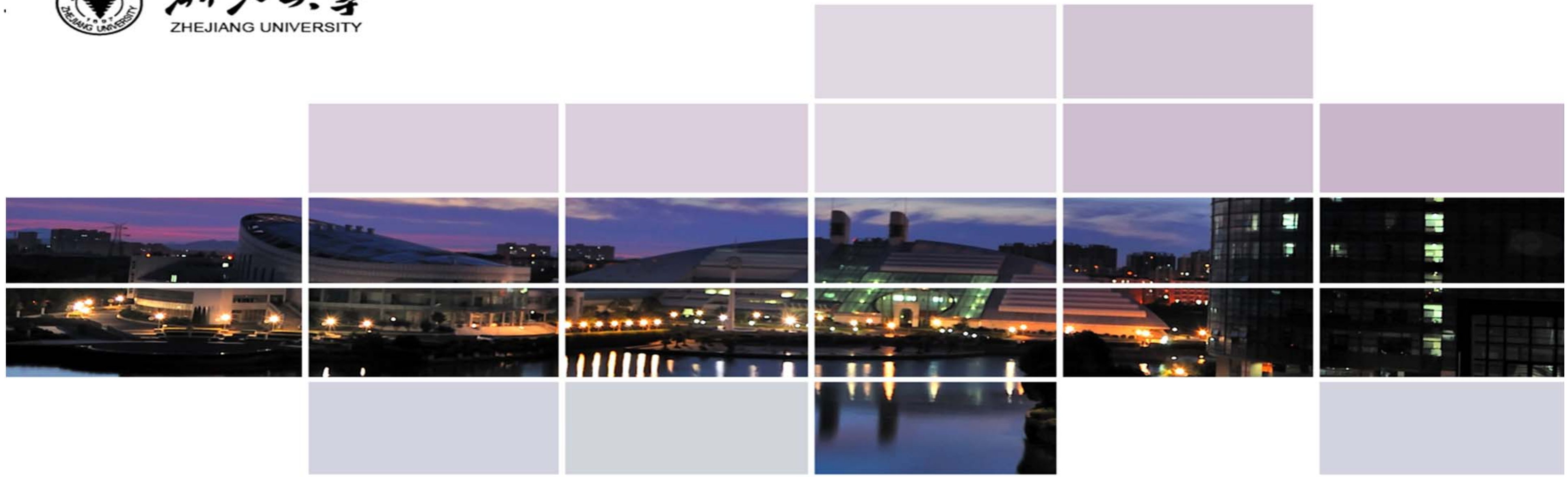
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第31讲　方差的性质

方差的性质：

1. 设c是常数，则 $D(c)=0.$

2. 设X是随机变量，c是常数，则有 $D(cX)=c^2D(X).$

   (特例：$D(-X)=D(X).$)

3. 设X,Y是两个随机变量，则有

   $$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\bullet tail,$$

   其中，$tail=\ E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$

   特别，若X,Y相互独立，则有 $D(X+Y)=D(X)+D(Y).$

综合上述三项，设X,Y相互独立，a,b,c是常数，

则 $$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y).$$

(特例：$D(X+c)=D(X)$.)

推广到任意有限个独立随机变量线性组合的情况

$$D(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2D(X_i),$$

其中 $X_i, i=1,2,\cdots,n$, 相互独立.

4\. $D(X)=0 \Leftrightarrow P(X=c)=1$ 且 $c=E(X)$.

证明：

1. $D(c)=E\left\{[c-E(c)]^2\right\}=E\left\{[c-c]^2\right\}=0.$

2. $D(cX)=E[(cX)^2]-[E(cX)]^2$

$$=E(c^2X^2)-[cE(X)]^2$$

$$=c^2E(X^2)-c^2[E(X)]^2$$

$$=c^2\left\{E(X^2)-[E(X)]^2\right\}=c^2D(X).$$

3. $D(X+Y)=E\left\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\right\}$

$=E\left\{[(X+Y)-(E(X)+E(Y))]^2\right\}=E\left\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\right\}$

$=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}+E\left\{[Y-E(Y)]^2\right\}+2E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$

$=D(X)+D(Y)+2E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}.$

当X,Y相互独立时，$X-E(X)$与$Y-E(Y)$相互独立

故 $E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}=E[X-E(X)]\bullet E[Y-E(Y)]=0$

所以 $D(X+Y)=D(X)+D(Y).$

4. 证略.

例1： 设 $X \sim B(n,p)$, 求 $D(X)$.

解： 类似二项分布期望的求法,引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{在第}k\text{次试验发生;} \\ 0, & A\text{在第}k\text{次试验不发生,} \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots n.$$

于是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,服从同一 $(0-1)$ 分布，参数均为 p,

且 $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. 故 $D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$.

即 $E(X) = np,\ D(X) = np(1-p)$.

例2： 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $D(X)$.

解： 令$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则Z服从标准正态分布，$E(Z) = 0$,

且Z的概率密度为：$\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

那么$D(Z) = E(Z^2) - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \bullet \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

此时 $X = \mu + \sigma Z$, 故 $D(X) = D(\mu + \sigma Z) = D(\sigma Z) = \sigma^2 D(Z) = \sigma^2$.

即正态分布的两个参数μ, σ^2分别是该分布的数学期望和方差.

性质： n个独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布.

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ i = 1, 2, \cdots n$, 且相互独立, 则它们的线性组合：

$$\boxed{\begin{aligned} & c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n \\ & \qquad \sim N(c_0 + c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n,\quad c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2), \end{aligned}}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$是不全为0的常数.

如: $X \sim N(1,3),\ Y \sim N(2,4)$, 且$X, Y$相互独立, 则

$$Z_1 = 2X - 3Y \ \sim N(-4\ , 48\ )$$

$$Z_2 = 2X - 3Y + 4 \ \sim N(0, 48)$$

$$\begin{aligned} & E(2X - 3Y) \\ & = E(2X) + E(-3Y) \\ & = 2E(X) - 3E(Y) \\ & = 2\times 1 - 3\times 2 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D(2X - 3Y) \\ & = D(2X) + D(-3Y) \\ & = 2^2 D(X) + (-3)^2 D(Y) \\ & = 2^2 \times 3 + (-3)^2 \times 4 = 48 \end{aligned}$$

例3: 设活塞的直径(以厘米计) $X \sim N(22.40, 0.03^2)$, 汽缸的直径 $Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y相互独立. 现任取一只活塞和一只汽缸, 求活塞能装入汽缸的概率.

解: 按题意需求 $P(X \le Y) = P(X - Y \le 0)$

由于 $X - Y \sim N(-0.10, 0.05^2)$

故有 $P(X \le Y) = P(X - Y \le 0)$

$$= \Phi\left(\frac{0-(-0.10)}{0.05}\right) = \Phi(2) = 0.9772.$$

例4: 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$, 方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$,

记 $X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 称$X^*$为$X$的**标准化变量**.

证明：$E(X^*)=0,\ D(X^*)=1.$

证明:

$$E(X^*)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$$

$$D(X^*)=E(X^{*2})-[E(X^*)]^2=E(X^{*2})-0$$

$$=E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right]=E\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]$$

$$=\frac{D(X)}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1.$$