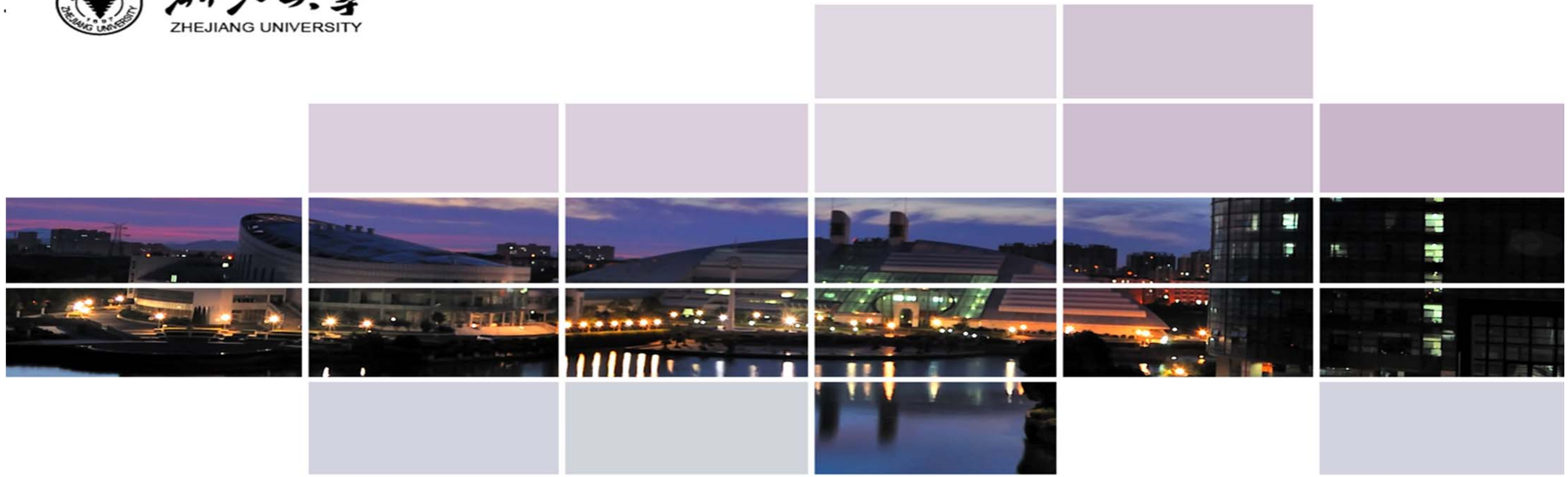
ZHEJIANG UNIVERSITY



第30讲 方差定义和计算公式

随机变量X的均值：$E(X)$

X对于均值的离差：$X-E(X)$

X对于均值的平均离差：$E(X-E(X))=0$

反映随机变量波动性可以用：$E[X-E(X)]^2$

方差

定义: 设X是一个随机变量，若$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，

则称其为X的**方差**，记为$D(X)$或$Var(X)$，即

$$\boxed{D(X)=Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}.}$$

将$\sqrt{D(X)}$记为$\sigma(X)$,称为X的**标准差**或**均方差**.

$D(X)$和$\sigma(X)$刻画了X取值的波动性，是衡量X取值分散程度的数字特征．若$D(X)$较小，则X取值比较集中；反之，若$D(X)$较大，则说明X取值比较分散.

$\sigma(X)$是与随机变量X具有相同量纲的量.

注意到，当取 $g(x)=[x-E(X)]^2$，则 $D(X)=E(g(X))$.

- 对于离散型随机变量X，其分布律为

$$P(X=x_i)=p_i,\ i=1,2,\cdots,$$

则

$$\boxed{D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i;}$$

- 对于连续型随机变量X，其概率密度函数为 $f(x)$,

则

$$\boxed{D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx.}$$

利用数学期望的性质，可得方差的计算公式:

$$\boxed{D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

事实上，
$$\begin{aligned}D(X)&=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}\\&=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2.\end{aligned}$$

例1：设随机变量X具有$0-1$分布，其分布律为：

$$P(X=0)=1-p,\ P(X=1)=p,\ \text{求}\ D(X).$$

解：已知 $E(X)=p$，且

$$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p.$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

即0-1分布的期望为p，方差为$p(1-p)$.

例2： 设 $X \sim \pi(\lambda)$, $\lambda > 0$, 求 $D(X)$.

解： X的分布律为：$P(X=k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$k = 0, 1, \cdots \quad \lambda > 0$;

之前，已算得 $E(X) = \lambda$.

而 $E(X^2) = E\left[X(X-1)+X\right] = E[X(X-1)] + E(X)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \lambda = \lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda$,

即泊松分布的均值与方差相等, 都等于参数λ.

例3: 设 $X \sim U(a,b),\ a<b,$ 求 $D(X)$.

解: X的概率密度为: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

已知 $E(X)=\dfrac{a+b}{2},$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{a^2+b^2+ab}{3}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{a^2+b^2+ab}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

例4： 设 $X \sim E(\lambda),\ \lambda > 0$, 求 $D(X)$.

解： X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

已知 $E(X)=1/\lambda$,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx=2/\lambda^2,$$

于是 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2/\lambda^2-1/\lambda^2=1/\lambda^2$,

即对指数分布而言，方差是期望的平方.

例5： 某人有一笔资金，可投入两个项目A和B. 根据以往的经验，两项目的收益率X与Y的分布律如下：

X	50%	-40%
P	0.6	0.4

Y	30%	10%	-20%
P	0.3	0.6	0.1

问：该人应投资哪个项目?

解： 先来分析一下两个项目的平均收益率

$$E(X)=50\%\times 0.6+(-40\%)\times 0.4=14\%;$$

$$E(Y)=30\%\times 0.3+10\%\times 0.6+(-20\%)\times 0.1=13\%<E(X).$$

再来计算两个项目的收益率的方差及标准差

$$D(X)=(50\%)^2\times 0.6+(-40\%)^2\times 0.4-(14\%)^2=0.1944;$$

$$D(Y)=(30\%)^2\times 0.3+(10\%)^2\times 0.6+(-20\%)^2\times 0.1-(13\%)^2=0.0201;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 0.441,\quad \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}\approx 0.142.$$

$\sigma(X)$约为$\sigma(Y)$的3倍.

由此可见, 项目A的平均收益率虽然比项目B高了1%, 但是它的投资风险是项目B的3倍, 因此权衡收益与风险, 该投资者应宜选择项目B.