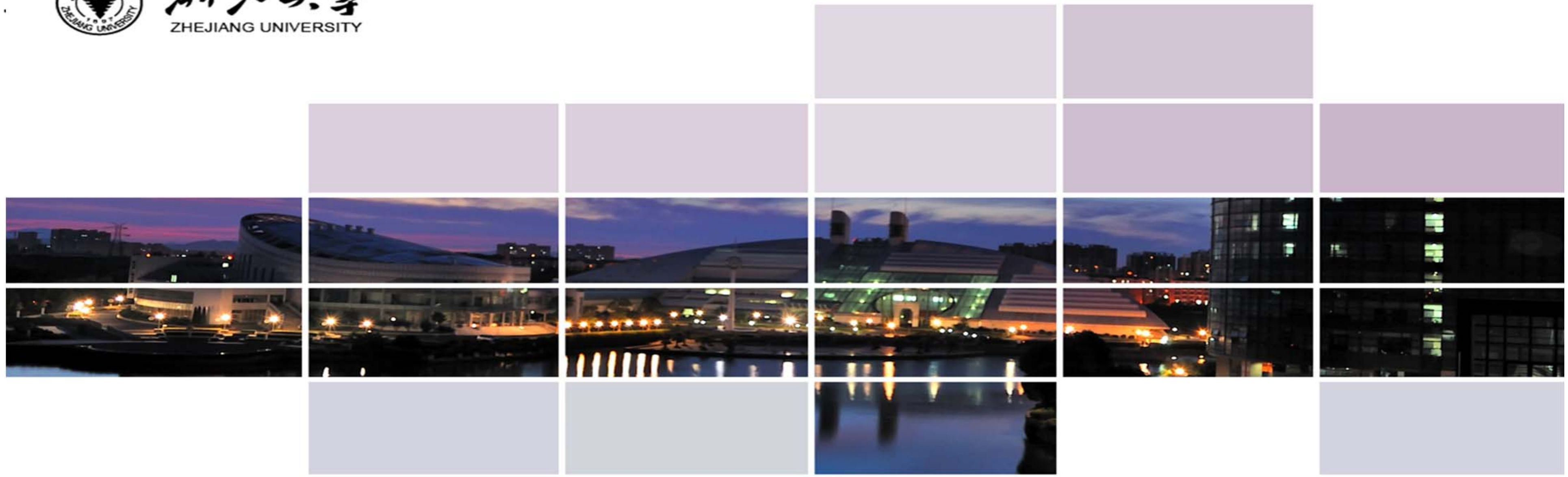
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第29讲 数学期望的性质

数学期望的性质:

1. 设c是常数, 则有 $E(c)=c$;

2. 设X是一个随机变量, c是常数, 则有 $E(cX)=cE(X)$;

3. 设X, Y是两个随机变量, 则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

将上面三点合起来，则有 $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$;

可推广到任意有限个随机变量线性组合的情况:

$$E(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i).$$

4. 设X, Y是相互独立的两个随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y);$$

可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i),$$

其中 $X_i, i=1,2,\cdots,n,$ 相互独立.

证明：

1. c是常数，$P(X=c)=1, E(c)=E(X)=c\times 1=c.$

下面仅对连续型随机变量给予证明 (设$X\sim f_X(x),(X,Y)\sim f(x,y)$)

(利用随机变量函数的数学期望的两个定理来证)

2. $E(cX)=\int_{-\infty}^{+\infty} cx\bullet f_X(x)dx=c\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx=cE(X).$

3. $E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

$$=E(X)+E(Y).$$

4. $$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y).$$

数学期望的性质:

1. 设c是常数, 则有 $E(c)=c$;

2. 设X是一个随机变量, c是常数, 则有 $E(cX)=cE(X)$;

3. 设X, Y是两个随机变量, 则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

将上面三点合起来，则有 $E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$;

4. 设X, Y是相互独立的两个随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

例1： 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，证明：$E(X)=\mu.$

证明: 令 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 则Z服从标准正态分布, 且 $E(Z)=0.$

此时 $X=\mu+\sigma Z,$

故 $E(X)=E(\mu+\sigma Z)=E(\mu)+E(\sigma Z)$

$$=\mu+\sigma E(Z)=\mu+\sigma\cdot 0=\mu.$$

即服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量的期望为μ.

例2： 设 $X \sim B(n,p),\ 0<p<1,\ n\geq 1$, 求 $E(X)$.

解： 由题意知,随机变量X可看成是n重贝努里试验中事件A发生的次数, 此时 $P(A)=p$. 引入随机变量

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{在第}k\text{次试验发生;} \\ 0, & A\text{在第}k\text{次试验不发生,} \end{cases} \quad k=1,2,\cdots,n.$$

于是$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,服从同一$(0-1)$分布(参数为p), $E(X_k)=p,\forall k$,

且 $X = X_1+X_2+\cdots+X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

故 $E(X)=E(\sum_{k=1}^{n} X_k)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k)=np$,

即服从 $B(n,p)$ 的随机变量的期望为np.

注: 以n,p为参数的二项分布的随机变量,可分解为n个相互独立且都服从以p为参数的(0-1)分布的随机变量之和.

例3： (配对问题)一个小班有n个同学，编号为1，2,$\cdots$, n号，中秋节前每人准备一件礼物，相应编号为1，2，$\cdots$，n. 将所有礼物集中放在一起，然后每个同学随机取一件，若取到自己的礼物，就认为配对成功. 以X表示n个同学配对成功的个数，求 $E(X)$.

解: 引入随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{号同学配对成功;} \\ 0, & \text{第}i\text{号同学未配对成功,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n.$

易知：$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，且$X_i$服从$0-1$分布，参数为$\dfrac{1}{n}$.

故 $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} = 1.$

注：X不服从二项分布！

本题是将X分解成数个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望，这种处理方法具有一定的普遍意义.

例4： 计算机程序随机产生0 ~ 9中的数字，独立进行100次，记X_i为第i次产生的数字，$i=1,2,\cdots,100$. 将这100个数进行乘积运算，得到一数，记为Y，求 $E(Y)$.

解： 由题意知，$X_1, X_2, \cdots, X_{100}$，独立同分布，其分布律均为

$$P\{X_i=k\}=1/10,\ k=0,1,\cdots,9.$$

故 $E(X_i)=\sum_{k=0}^{9} k\cdot\frac{1}{10}=4.5$，又 $Y=X_1X_2\cdots X_{100}=\prod_{i=1}^{100} X_i$，

从而 $E(Y)=E(\prod_{i=1}^{100} X_i)=\prod_{i=1}^{100} E(X_i)=4.5^{100}.$