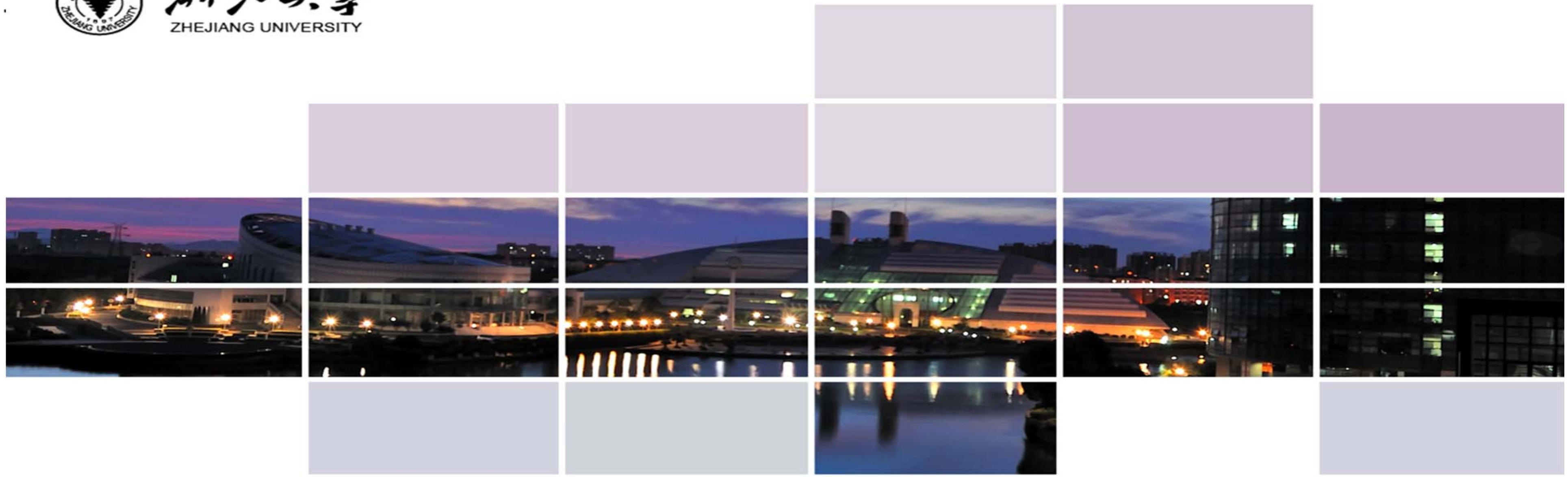
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第28讲　随机变量函数的数学期望

例1：设随机变量X的概率分布律为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.4	0.2	0.3

$Y = X^2$，求Y的数学期望$E(Y)$.

解：由题意可知Y的概率分布律为

Y	0	1	4
P	0.4	0.3	0.3

那么Y的期望 $E(Y) = 0\times 0.4 + 1\times 0.3 + 4\times 0.3 = 1.5.$

事实上 $E(Y) = (-1)^2\times 0.1 + 0^2\times 0.4 + 1^2\times 0.2 + 2^2\times 0.3 = 1.5.$

也就是说，对于随机变量$\boldsymbol{X}$的函数有时可以根据$\boldsymbol{X}$的分布以及函数表达式来直接得到其期望.

定理1: 设Y是随机变量X的函数：$Y = g(X)$,

X是离散型随机变量，它的分布律为：

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛，则

$$\boxed{E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k;}$$

定理1（续）：

设Y是随机变量X的函数：$Y = g(X)$,

X是连续型随机变量，它的概率密度函数为$f(x)$,

若$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$\boxed{E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx}$$

注：以后无特殊说明时，均假设涉及的期望是存在的.

例2：一银行服务需要等待，设等待时间X（以分钟计）服从期望为10的指数分布. 某人进了银行，且打算过会儿去办另一件事，于是先等待，如果超过15分钟还没有等到服务就离开，设他实际的等待时间为Y，求此人实际等待的平均时间$E(Y)$.

解：由题意知，$Y=\min\{X,15\}$, 故取 $g(x)=\min\{x,15\}$,

则 $Y=g(X)$. 利用随机变量函数的期望的定理**1**, 得

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x,15\} f_X(x)dx$$

$$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x,15\} f_X(x)dx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} \min\{x,15\} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx$$

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10}, & x>0; \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

$$=\int_{0}^{15} x \bullet \frac{1}{10} e^{-x/10} dx+\int_{15}^{+\infty} 15 \bullet \frac{1}{10} e^{-x/10} dx$$

$$=10-10e^{-3/2} \approx 7.768 \text{ (分钟)}.$$

定理的重要意义在于我们求$E(Y)$时,不必算出Y的分布律或概率密度函数，而只要利用X的分布律或概率密度函数以及Y与X之间的关系就可以了.

(*the Rule of the Lazy Statistician* /懒人定理)

该定理也可以推广到两个或两个以上随机变量的函数的情况.

OH~~~NO!

可以偷懒哦!

定理2:

设Z是随机变量X,Y的函数：$Z=h(X,Y)$,

若二元离散型随机变量$\left(X,Y\right)$的分布律为：

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots$，则有

$$\boxed{E(Z)=E[h(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}h(x_i,y_j)p_{ij};}$$

定理2（续）：

设Z是随机变量X,Y的函数：$Z=h(X,Y)$,

若二元连续型随机变量(X,Y)的概率密度

为$f(x,y)$，则有

$$\boxed{E(Z)=E(h(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)f(x,y)dxdy.}$$

特别地，$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy.$$

例3： 设二元随机变量(X,Y)的联合分布律为：

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

求随机变量$Z=\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}$的数学期望.

解： $E(Z)=E[\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}]$

$$=\sin\frac{\pi(0+0)}{2}\times 0.1+\sin\frac{\pi(1+0)}{2}\times 0.15+\sin\frac{\pi(0+1)}{2}\times 0.25$$

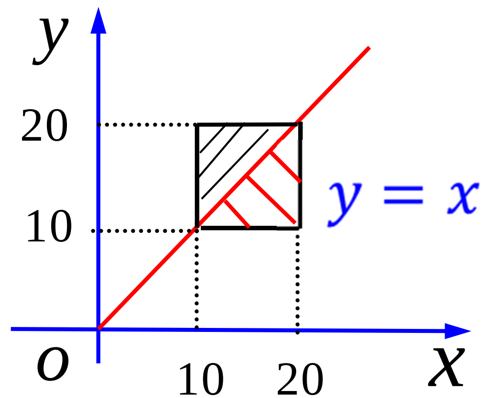
$$+\sin\frac{\pi(1+1)}{2}\times 0.2+\sin\frac{\pi(0+2)}{2}\times 0.15+\sin\frac{\pi(1+2)}{2}\times 0.15=0.25.$$

例4: 某商店经销某种商品, 每周进货量X与需求量Y是相互独立的随机变量, 且都服从区间[10, 20]上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可获利1000元; 若需求量超过进货量, 商店可从他处调剂供应, 这时每单位商品可获利500元. 试计算此商店经销该种商品每周所获的平均利润.

解: 设Z表示此商店经销该种商品每周所获的利润, 则

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1000Y, & \text{若} Y \le X; \\ 1000X + 500(Y - X) = 500(X+Y), & \text{若} Y > X. \end{cases}$$

$$Z = g(X,Y) = \begin{cases} 1000Y, & 若 Y \le X; \\ 500(X+Y), & 若 Y > X. \end{cases}$$



而 $$f(x,y) = \begin{cases} 1/100, & 10 \le x \le 20, 10 \le y \le 20; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

故 $$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_{y \le x} 1000y \bullet f(x,y)\,dxdy + \iint_{y > x} 500(x+y) \bullet f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{10}^{20} dx \int_{10}^{x} 1000y \times 1/100\,dy + \int_{10}^{20} dx \int_{x}^{20} 500(x+y) \times 1/100\,dy$$

$$\approx 14166.7\ (元).$$