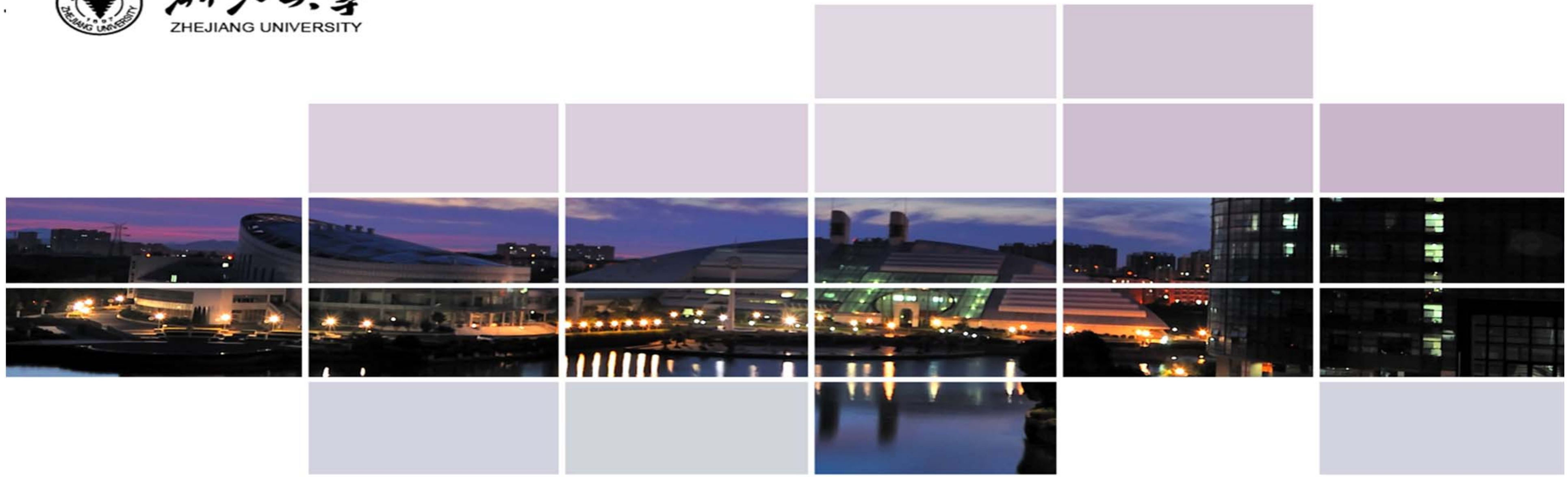
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第27讲 随机变量的数学期望

随机变量的数字特征:

- 数学期望
- 方差
- 协方差与相关系数
- 其它数字特征
- 多元正态分布的性质

例 1:甲、乙两射手，他们的某次射击成绩分别为:

甲射手

击中环数	8	9	10
次数	10	80	10

乙射手

击中环数	8	9	10
次数	10	80	10

试比较:哪位射手的技术比较好?

解: 甲的平均成绩为

$$\frac{8\times10+9\times80+10\times10}{100}=8\times\frac{10}{100}+9\times\frac{80}{100}+10\times\frac{10}{100}=9;$$

乙的平均成绩为

$$\frac{8\times20+9\times65+10\times15}{100}=8\times\frac{20}{100}+9\times\frac{65}{100}+10\times\frac{15}{100}=8.95.$$

记平均击中的环数为$\overline{x}$, 则

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_k x_k n_k =\sum_k x_k \frac{n_k}{n} =\sum_k x_k f_k.$$

若记射手击中的环数为X,在第4讲中，曾提到过，

当n充分大时，频率f_k的稳定值为概率$p_k=P(X=x_k)$.

因此$\overline{x}$的稳定值为$\sum\limits_k x_k p_k$,它反映了射手的平均水平.

定义:设离散型随机变量X的分布律为：$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots$

若级数$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$绝对收敛，则称级数$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$的值为随机变量$X$的数学期望，记为$E(X)$,即

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k.}$$

注：p_k可以理解成为“加权平均”中x_k的权重.

数学期望简称期望，又称均值$(mean)$.

定义: 设连续型随机变量X的概率密度函数为$f(x)$,

若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛（即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)dx <+\infty$）,

则称积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$的值为随机变量$X$的数学期望,即

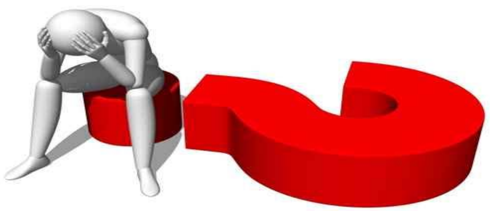
$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.}$$

“期望”名称的起源——分赌本问题

例2：17世纪中叶，有甲乙两赌徒，赌技相同,各出赌注50法郎. 约定无平局，谁先赢3局, 则获全部赌注. 当甲赢2局、乙赢1局时，中止了赌博. 问如何分赌本才算公平?

均分, 对甲不公平,

全部归甲, 对乙不公平!



按已赌局数和再赌下去的“期望”分：

因为最多再赌两局必分胜负，共三种情况：

① 第三局甲赢； (1/2)

② 第三局乙赢，第四局甲赢； (1/4)

③ 第三局乙赢，第四局乙赢； (1/4)

由于赌技相同，所以甲获得100法郎的可能性为3/4，乙获得100法郎的可能性为1/4.

帕斯卡

balalabalabalabala

$$\dashrightarrow$$
$$\dashleftarrow$$

费马

则根据以上分析：乙的所得 X 是一个可能取值为0或100的随机变量，其分布律为：

X	0	100
P	3/4	1/4

乙的“期望”所得是：

$$0\times3/4+100\times1/4=25.$$

所以甲分总赌本的3/4、乙分总赌本的1/4.

这种分法既考虑了已赌局数，又包含了再赌下去的“期望”，因此更为合理一些.

由上例可知，若随机变量X具有0−1分布，其分布律为：

$$P(X=0)=1-p,\ P(X=1)=p,$$

则 $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p.$

即 0−1分布的期望即为它的参数p.

例3： 设 $X\sim\pi(\lambda),\ \lambda>0$, 求 $E(X)$.

解： X的分布律为：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则X的数学期望为：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\bullet\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}k\bullet\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}=\lambda,$$

即 泊松分布的期望即为它的参数λ.

例4： 设 $Z \sim N(0,1)$, 求 $E(Z)$.

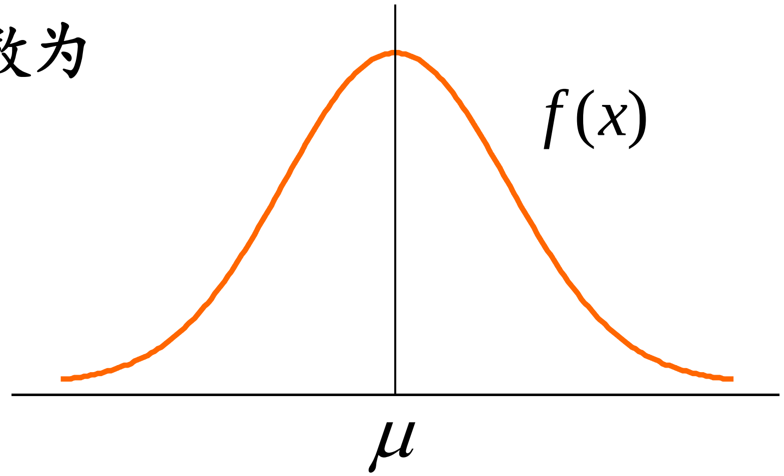
解： Z的概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 是一个偶函数.

故 $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx \; = 0.$

若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

则 $E(X)=\mu.$



例5： 设 $X \sim E(\lambda),\ \lambda > 0$, 求$E(X)$.

解： 已知X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda x}d(\lambda x)$$

$$=-\int_0^{+\infty} x\,d(e^{-\lambda x})=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

即 指数分布的期望为参数的倒数.

设X服从指数分布，期望为2，则其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

另外，也可以得到：

- 二项分布$B(n, p)$的期望为np;
- 参数为p的几何分布为$1/p$;
- 均匀分布$U(a,b)$的期望为$(a+b)/2$.