浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第26讲 $max(X, Y)$和$min(X, Y)$的分布

$M=max(X,Y)$和$N=min(X,Y)$的分布

设X,Y是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，求M,N的分布函数$F_{max}(z)$和$F_{min}(z)$。

$M=max(X,Y)$的分布函数为：

$$F_{max}(z)=P(M\le z)$$
$$=P(X\le z,Y\le z)$$
$$\overset{独立}{=}P(X\le z)P(Y\le z)$$

$$\boxed{F_{max}(z)=F_X(z)F_Y(z)}$$

$N=min(X,Y)$的分布函数为：

$$F_{min}(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)$$
$$=1-P(X>z,Y>z)$$
$$\overset{独立}{=}1-P(X>z)P(Y>z)$$

$$\boxed{F_{min}(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))}$$

n个相互独立的随机变量的情况

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为：$F_{X_i}(x_i)$ ，$i = 1, 2, \cdots, n$

$M = max(X_1, \cdots, X_n)$ 及$N = min(X_1, \cdots, X_n)$的分布函数为：

$$F_{max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$
$$F_{min}(z) = 1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 →

$$F_{max}(z) = (F(z))^n$$
$$F_{min}(z) = 1-[1-F(z)]^n$$

共同的分布函数$F(z)$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$是连续的独立同分布变量 →

$$f_{max}(z) = n\left[F(z)\right]^{n-1} f(z)$$
$$f_{min}(z) = n\left[1-F(z)\right]^{n-1} f(z)$$

共同的密度函数$f(z)$

例1:已知X、Y的分布函数

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0\end{cases},\quad F_Y(y)=\begin{cases}0.5e^{y}, & y<0\\ 1-0.5e^{-y}, & y\ge 0\end{cases}$$

并设X与Y独立，求$Z=max(X,Y)$的分布函数。

解:$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(max(X,Y)\le z)=P(X\le z,Y\le z)$

$$\overset{\text{独立}}{=} P(X\le z)P(Y\le z)=F_X(z)F_Y(z)$$

当$z<0$时，$F_X(z)=0$，$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=0$

当$z\ge 0$时，$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=(1-e^{-z})(1-0.5e^{-z})$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1-e^{-z})(1-0.5e^{-z}), & z\ge 0\end{cases}$$

例2：设X与Y独立，均服从$U(0,1)$,求

$M=max(X,Y)$的密度函数。

解：$f(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, 0<x<1, \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$F_{max}(x)=[F(x)]^2=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x<1, \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$f_{max}(x)=F'_{max}(x)$$

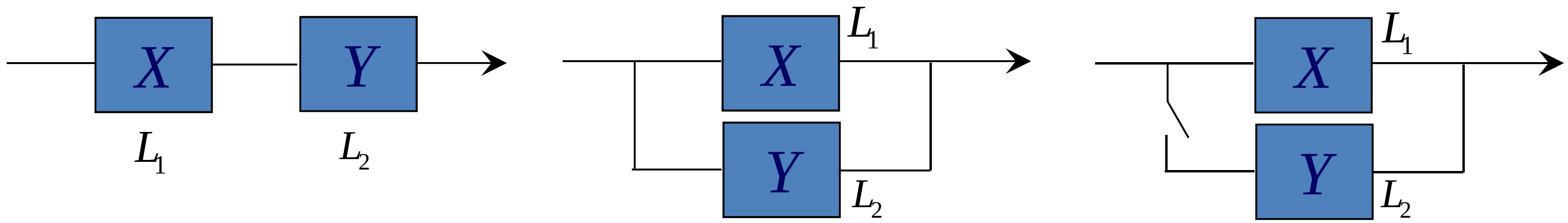
$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}.$$

或 $f_{max}(x)=2\left[F(x)\right]^{2-1}f(x)$

$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}.$$

例3: 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联结而成，联结的方式分别为：(1) 串联；(2) 并联；(3) 备用（当系统L_1损坏时，系统L_2开始工作）。如图，设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，已知它们的概率密度分别如下所示，求系统寿命的概率密度.

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}\qquad \alpha>0,\beta>0,\alpha\ne\beta$$



(1) 串联的情况

由于当L_1, L_2中有一个损坏时，系统L就停止工作，所以L的寿命为 $Z = min(X,Y)$；而X,Y的分布函数分别为：

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 1-e^{-\beta y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

所以Z的分布函数为：

$$F_{min}(z) = 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)] = \begin{cases} 1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

于是Z的概率密度为：

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

即Z仍服从指数分布

(2) 并联的情况

由于当且仅当L_1, L_2都损坏时，系统L才停止工作，

所以这时L的寿命为$Z = max(X, Y)$，Z的分布函数为：

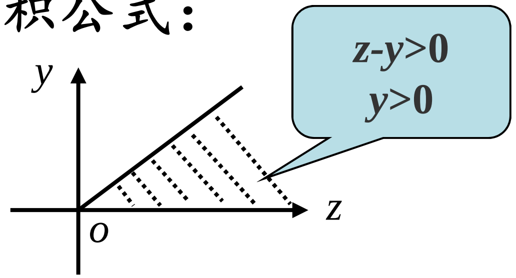
$$F_{max}(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

于是Z的概率密度为：

$$f_{max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha+\beta) z}, & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

(3) 备用的情况

由于这时当系统L_1损坏时，系统L_2才开始工作，因此整个系统L的寿命Z是L_1, L_2寿命之和，即$Z = X + Y$，由卷积公式：



当$z \le 0$时，$f_Z(z) = 0$

当$z > 0$时，$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$

$$= \int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)} \beta e^{-\beta y} dy = \alpha\beta e^{-\alpha z} \int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y} dy$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}]$$

即 $f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}], & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$