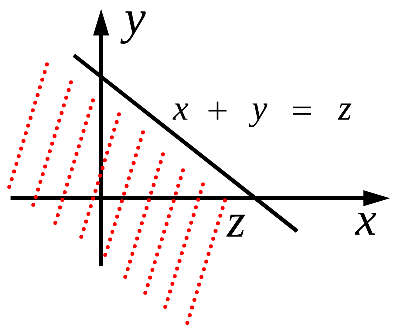
第25讲　$Z=X+Y$的分布

连续型随机变量$Z=X+Y$ 的分布

设(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为:

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$

固定z,y
令$u=x+y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du=\int_{-\infty}^{z} f_Z(u)du$$

故$Z=X+Y$的概率密度为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$$

由X,Y的对等性，$f_Z(z)$又可写成

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

卷积公式：

将X和Y相互独立时，$Z=X+Y$的密度函数公式称为**卷积公式**

即 $$\boxed{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx}$$

例1: 设X和Y是相互独立的标准正态随机变量，

求$Z=X+Y$的概率密度。

解：由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{z}{2})^2}dx$$

$$\overset{\frac{t}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2}}{=}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}dt=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

即 $Z\sim N(0,2)$

推广结论：设X,Y相互独立，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则

$$Z = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

更一般的结论：

n个独立的正态变量的线性组合仍服从正态分布，即：

若$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $\;i=1,2,\cdots n$，且它们相互独立，则其线性组合：

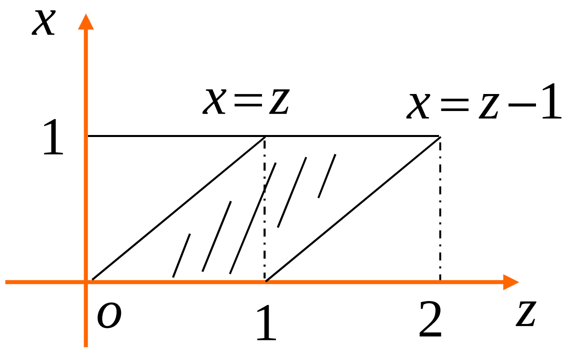
$$c_0 + c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n \quad \sim \quad N(\mu,\sigma^2)$$

其中$c_1,c_2\cdots c_n$是不全为0的常数，两个参数(可由期望及方差得到)为：

$$\mu = c_0 + c_1\mu_1 + \cdots + c_n\mu_n, \qquad \sigma^2 = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_n^2\sigma_n^2$$

例2：X,Y相互独立，同时服从$[0,1]$上的均匀分布，

求$Z=X+Y$的概率密度。



解：由卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

易知仅当$\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le z-x\le 1\end{cases}$ 即$\begin{cases}0\le x\le 1\\z-1\le x\le z\end{cases}$

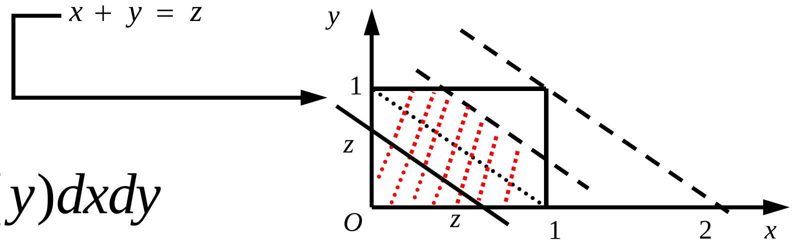
时，上述积分的被积函数不等于零！

根据x与z构成的区域，

依 z 分段考虑，得：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z dx=z & 0\le z\le 1\\ \int_{z-1}^1 dx=2-z & 1<z\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

另解，先求$F(x)$再求$f(x)$法：



解：$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x+y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$

当$0\le z\le 1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{\substack{x+y\le z\\0<x,y<1}} 1\times 1dxdy=$三角形面积$=\dfrac{1}{2}z^2$

当$1<z\le 2$时，$F_Z(z)=$正方形面积减去三角形面积$=1-\dfrac{1}{2}(2-z)^2$

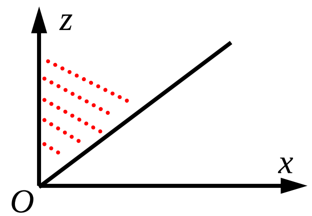
当$z>2$时，$F_Z(z)=1$

$$\therefore F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ 0.5z^2, & 0\le z\le 1\\ -0.5z^2+2z-1, & 1<z\le 2\\ 1, & z>2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F_Z{}'(z)=\begin{cases}z & ,0\le z\le 1\\ 2-z & ,1<z\le 2\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

- 例3：设X,Y相互独立、服从相同的指数分布，概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，求$Z=X+Y$的概率密度.

解：根据卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$



仅当$x>0$、$z-x>0$时，$f_X(x)f_Y(z-x)\neq 0$

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z \beta e^{-\beta x}\beta e^{\beta(x-z)}dx=\beta^2 ze^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

这是参数为$(2,\beta)$的Γ分布（$Gamma$）的密度函数

离散变量的独立和分布

1. $X_1, X_2, \cdots X_n$独立且均服从$B(1,p)$,则$X_1+X_2+\cdots+X_n \sim B(n,p)$
2. $X \sim B(n_1,p), Y \sim B(n_2,p)$,两者独立，则 $X+Y \sim B(n_1+n_2,p)$
3. $X \sim \pi(\lambda_1), Y \sim \pi(\lambda_2)$,两者独立，则 $X+Y \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$

证:3. $$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!} \times \frac{\lambda_2^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}$$

例4: 设$P(X=1)=0.25$, $P(X=2)=0.75$, $Y\sim N(0,1)$, X与Y独立,

求$Z=X+Y$的密度函数.

解: $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=P(X=1)P(X+Y\le z\mid X=1)+P(X=2)P(X+Y\le z\mid X=2)$$

$$=0.25P(Y\le z-1)+0.75P(Y\le z-2)$$

$$=0.25\Phi(z-1)+0.75\Phi(z-2)$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=0.25\varphi(z-1)+0.75\varphi(z-2)$$

$$=0.25\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-1)^2}{2}}+0.75\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-2)^2}{2}}$$