浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第24讲　二元随机变量函数的分布

二元随机变量函数的分布

- 设二元离散型随机变量(X,Y)具有概率分布

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\dots$$

问题 (1) 若$U=g(X,Y)$,则U的分布律是什么?

(2) 若$U=u(X,Y),V=v(X,Y)$,则(U,V)的分布律是什么?

方法 对于(1),先确定U的取值$u_i\ ,i=1,2,\dots$

再找出$(U=u_i)=\{(X,Y)\in D\}$,从而计算出分布律.

方法 对于(2),先确定(U,V)的取值 $(u_i,v_j)\quad i,j=1,2,\dots$

再找出$(U=u_i,V=v_j)=\{(X,Y)\in D\}$,从而计算出分布律;

例1：设X与Y的联合分布律为：

令$U=X+Y, V=\max(X,Y)$,

求U及(U,V)的分布律。

$X \backslash Y$	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

解：U的取值范围为2,3,4

$$P(U=2)=P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.2$$

$$P(U=3)=P(X+Y=3)=P(\{X=1,Y=2\}\cup\{X=2,Y=1\})$$

$$=P(\{X=1,Y=2\})+P(\{X=2,Y=1\})=0.1+0.3=0.4$$

$$P(U=4)=P(X+Y=4)=P(X=2,Y=2)=0.4$$

$\therefore U$的分布律为：

U	2	3	4
P_k	0.2	0.4	0.4

- 例1：设X与Y的联合分布律为：

  令$U=X+Y, V=\max(X,Y)$,

  求U及(U,V)的分布律。

$X \backslash Y$	1	2
1	0.2	0.1
2	0.3	0.4

解：U的取值范围为2,3,4；　V的取值范围为1, 2

$$P(U=2,V=1)=P(X+Y=2,\max(X,Y)=1)=P(X=1,Y=1)=0.2$$

$$P(U=3,V=1)=P(X+Y=3,\max(X,Y)=1)=0$$

$$P(U=4,V=1)=P(X+Y=4,\max(X,Y)=1)=0$$

$$P(U=2,V=2)=P(X+Y=2,\max(X,Y)=2)=0$$

$$P(U=3,V=2)=P(X+Y=3,\max(X,Y)=2)$$

$$=P(\{X=1,Y=2\}\cup\{X=2,Y=1\})$$

$$=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=0.1+0.3=0.4$$

$$P(U=4,V=2)=P(X+Y=4,\max(X,Y)=2)$$

$$=P(X=2,Y=2)=0.4$$

$U \backslash V$	1	2
2	0.2	0
3	0	0.4
4	0	0.4

- 例2：设X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

令$U=\begin{cases} 1, & X>1 \\ 0, & X\le 1 \end{cases}$，$V=\begin{cases} 1, & X>2 \\ 0, & X\le 2 \end{cases}$

求(U,V)的联合分布律。

解：$P(U=0,V=0)=P(X\le 1,X\le 2)=P(X\le 1)=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}$

$P(U=0,V=1)=P(X\le 1,X>2)=0$

$P(U=1,V=0)=P(X>1,X\le 2)=P(1<X\le 2)=\int_1^2 e^{-x}dx=e^{-1}-e^{-2}$

$P(U=1,V=1)=P(X>1,X>2)$

$=P(X>2)=\int_2^{+\infty} e^{-x}dx=e^{-2}$

$U \backslash V$	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

- 设二元连续型随机变量(X,Y)具有概率密度$f(x,y)$，Z是X,Y的函数，$Z=g(X,Y)$.

问题　Z的概率分布或密度函数是什么？

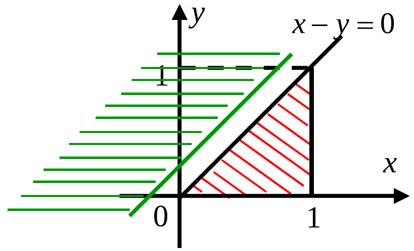
方法　先求Z的分布函数再求导得到密度函数.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)$$

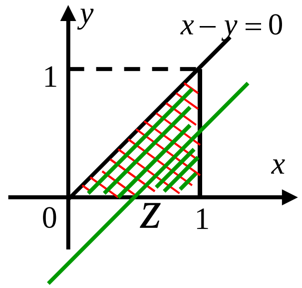
例3: 设(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}3x, 0<x<1, 0<y<x \\ 0, \quad 其他\end{cases}$，

求$Z=X-Y$的密度函数$f_Z(z)$。



解： $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy$

当$z\le 0$时，画$x-y\le z$区域图，可见，不与$f(x,y)$非零区域相交，所以 $F_Z(z)=0.$



当$0<z<1$时，根据画$x-y\le z$区域图，得：

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy=1-\iint\limits_{x-y>z} f(x,y)dxdy$$

$$=1-\int_z^1 dx\int_0^{x-z} 3xdy =\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}z^3$$

当$z\ge 1$时, $F_Z(z)=1$ $\quad\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}3(1-z^2)/2, & 0<z<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$