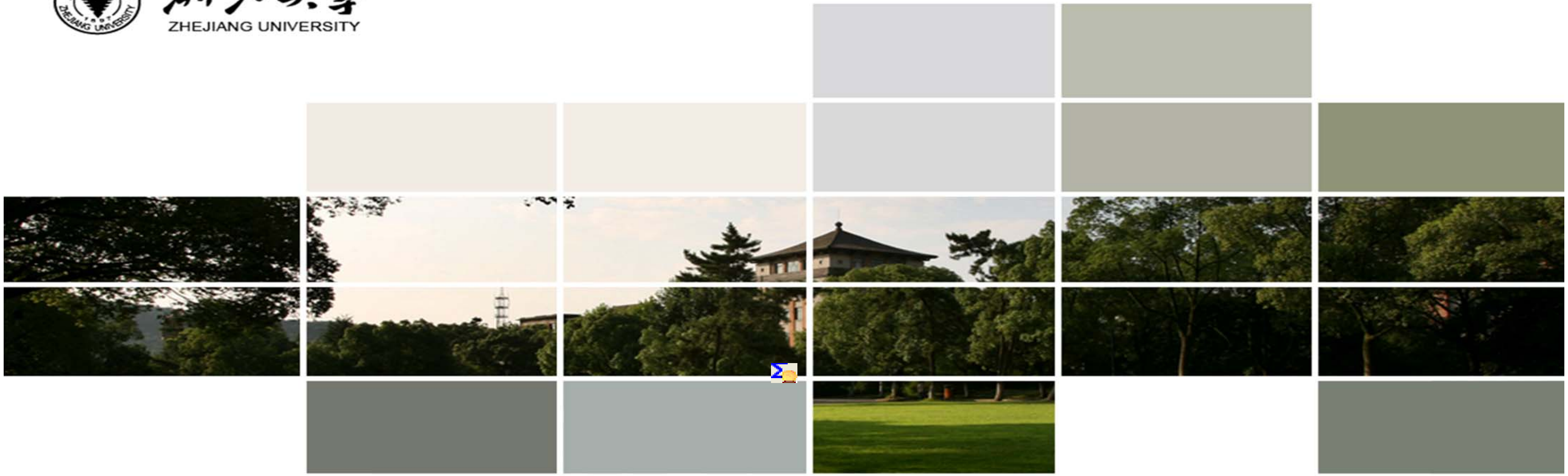
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第22讲 二元均匀分布，二元正态分布

二元均匀分布

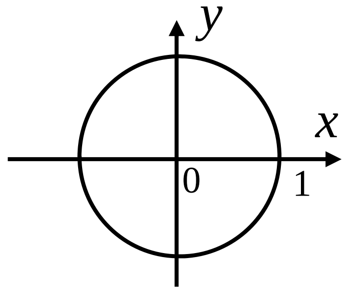
若二元随机变量(X,Y)的概率密度在平面上的一个有界区域D内是常数，而在其余地方取值为零，称$\left(X,Y\right)$在D上服从均匀分布。设 $f(x,y)=\begin{cases}1/A, & (x,y)\in D \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中A为区域D的面积。

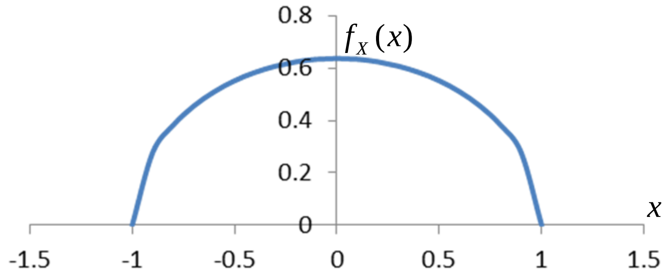
$$\because\ 1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\iint_D \frac{1}{A}dxdy \Rightarrow\ A=\iint_D dxdy$$

例1: 设随机变量(X,Y)在单位圆内服从均匀分布，求联合密度函数，X的边际密度函数及$X=x$时的Y条件密度函数。

解： 单位圆的面积为π，$\quad \therefore f(x,y)=\begin{cases} 1/\pi, & x^2+y^2<1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

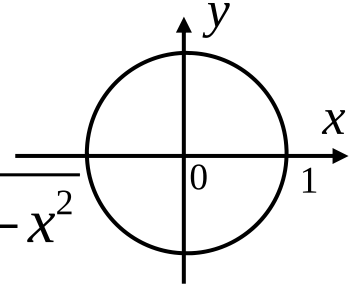


$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, -1<x<1 \\ 0, \qquad 其他 \end{cases}$$



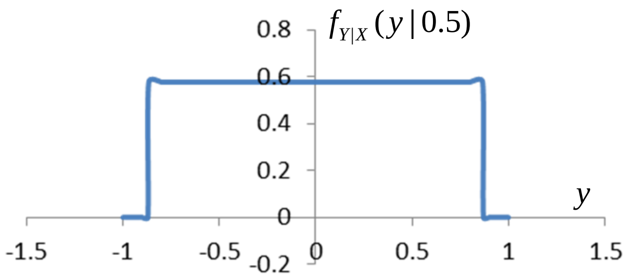
例1: 设随机变量(X,Y)在单位圆内服从均匀分布，求联合密度函数，X的边际密度函数及$X=x$时的Y条件密度函数。

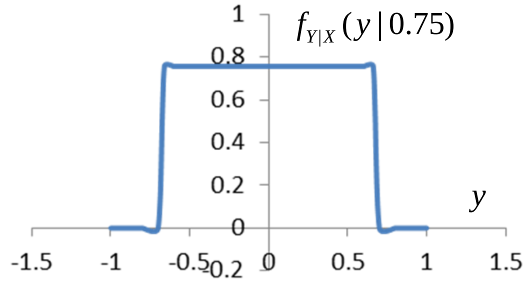
解：单位圆的面积为π， $\therefore f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2<1\\ 0, & 其他\end{cases}$



当$X=x(-1<x<1)$时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{2\sqrt{1-x^2}/\pi}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & |y|<\sqrt{1-x^2}\\ 0, & 其他\end{cases}$$





二元均匀分布的条件分布仍为：均匀分布

二元正态分布

设二元随机变量(X,Y)的概率密度为：

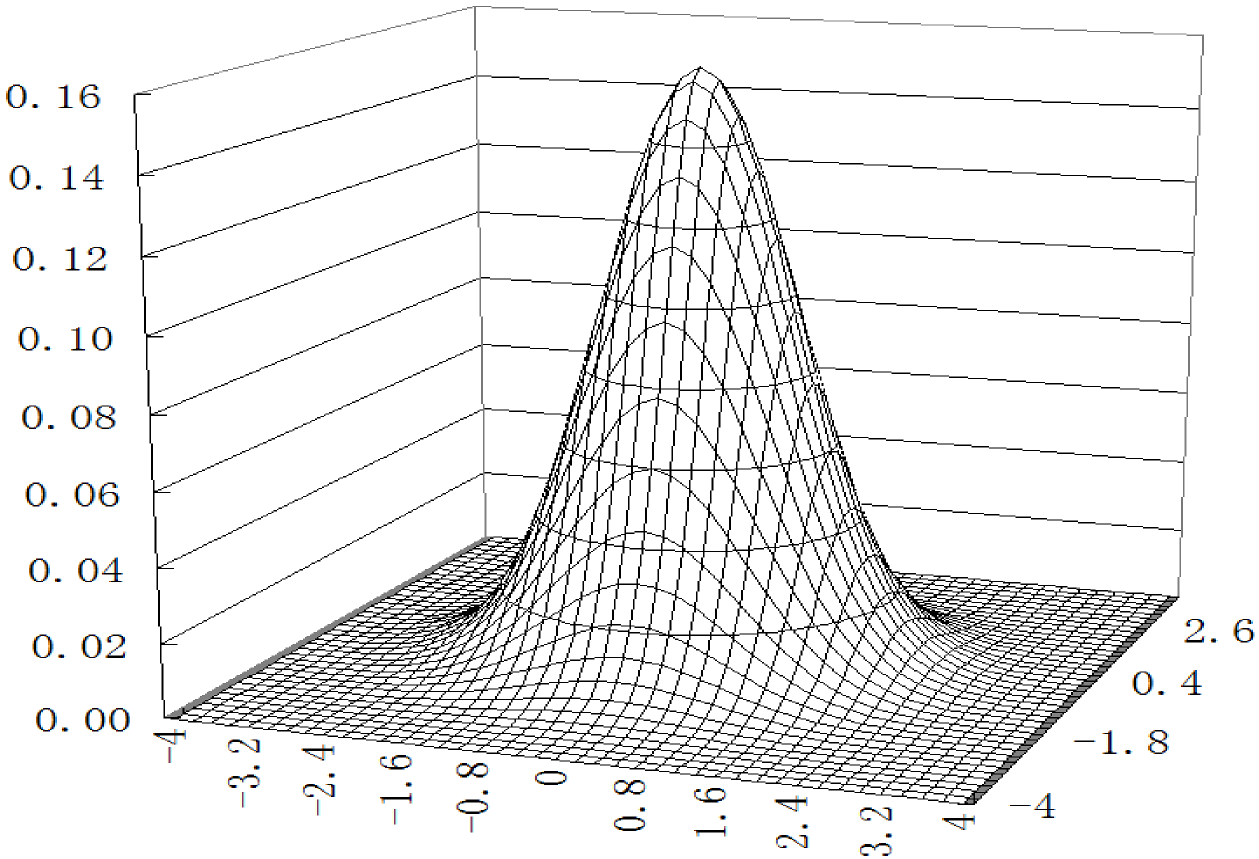
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty)$$

其中 μ_1, μ_2, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $-1<\rho<1$ 都是常数，称(X,Y)为服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二元正态分布。

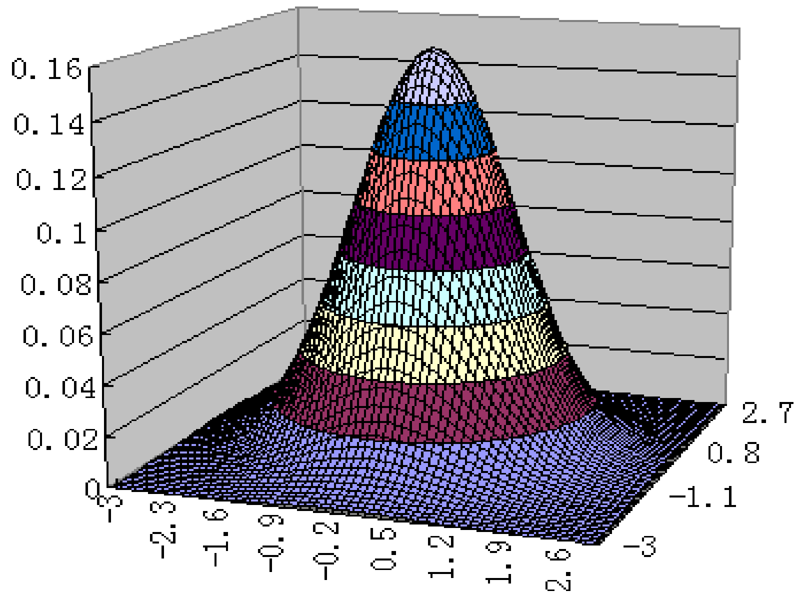
记为：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$

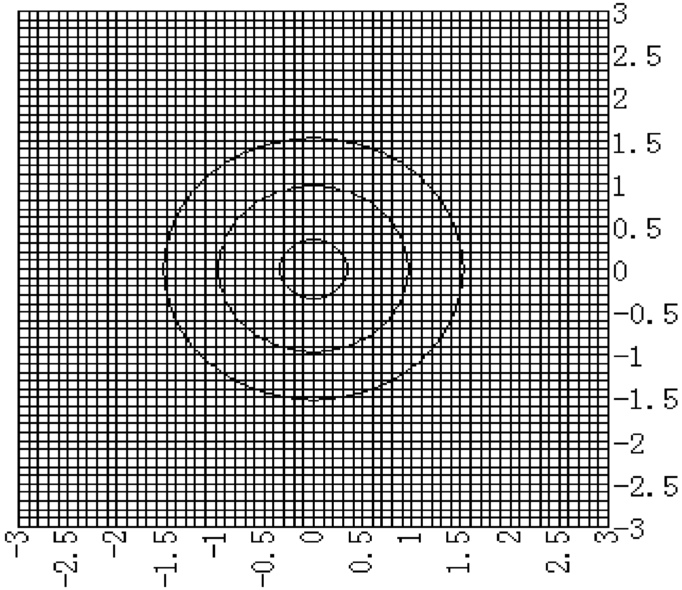


二元正态分布密度函数图与俯瞰图见实验8

$$(X, Y) \sim N(0,0,1,1,0)$$

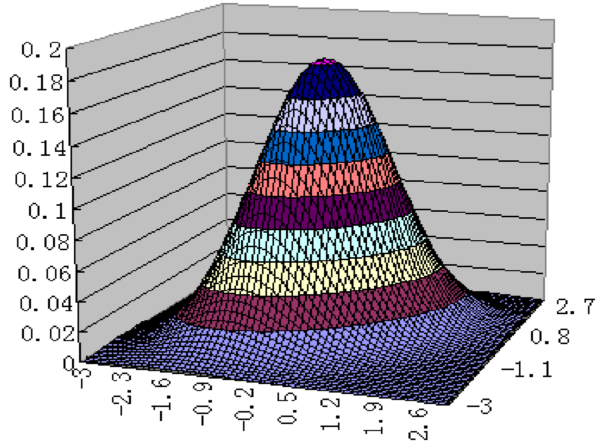
以下为$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho=0$的顶曲面图及俯瞰图

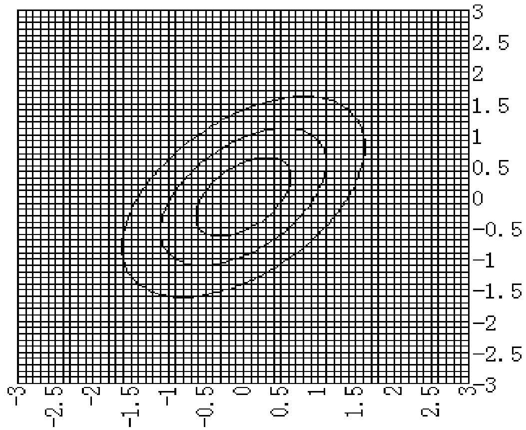




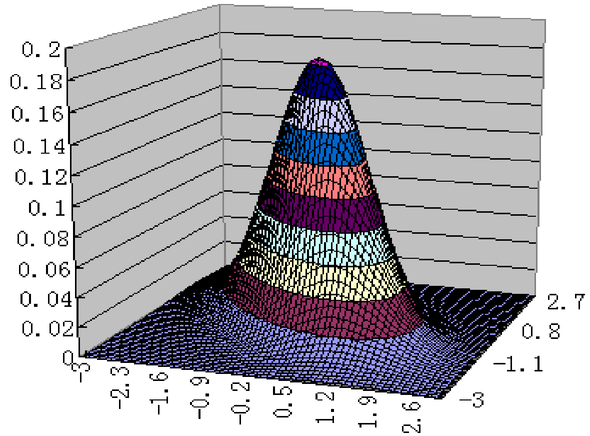
以下为$(X,Y)\sim N(0,0,1,1,\rho)$，其中$\rho=\pm0.5$的顶曲面图及俯瞰图

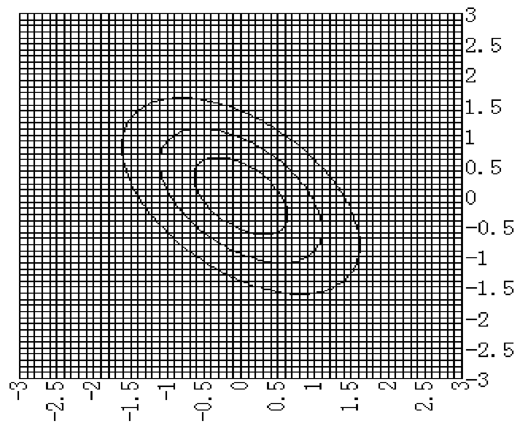
$\rho=0.5$





$\rho=-0.5$





例2：试求二元正态随机变量的边际概率密度.

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$　　以下记$C=1/(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} C\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} C\exp\{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2\}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\}\times$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left\{y-\left[\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right]\right\}^2\}dy$$

例2：试求二元正态随机变量的边际概率密度.

$$\therefore \quad f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

同理 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$，$-\infty<y<+\infty$

即二元正态分布的两个边际分布都是一元正态分布，并且都不依赖于参数ρ.

例3: 设二元随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$;

求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

解：$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^{\ 2}}\left[y-(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))\right]^2\right\}$$

即在$X=x$条件下，Y的条件分布仍是正态分布，

$$Y|X=x\ \sim\ N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\ (1-\rho^2)\sigma_2^{\ 2}).$$