浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

第21讲　二元连续型随机变量
条件概率密度

（三）条件概率密度

设二元随机变量$\left(X,Y\right)$的概率密度为$f(x,y)$,

$\left(X,Y\right)$关于Y的边际概率密度为$f_Y(y)$,

若对于固定的y, $f_Y(y)>0$, 且$f_Y(y)$连续,

则在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度为：

$$\boxed{f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$$

（三）条件概率密度

同理，若对于固定的$x, f_X(x)>0$，且$f_X(x)$连续，在$X=x$条件下，Y的条件概率密度为：

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}}$$

例1：设数X在区间(0,1)上随机取值，当观察到$X = x\left(0 < x < 1\right)$时，

数Y在区间$(x,1)$上随机取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$。

解：X的概率密度 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$，

对任给$x(0 < x < 1)$，在$X = x$条件下，Y的条件概率密度为：

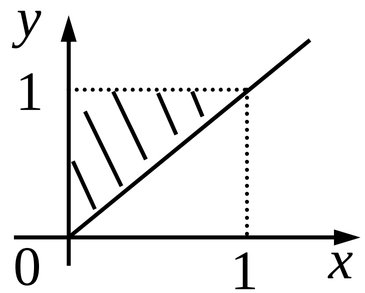
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & ,x<y<1 \\ 0 & ,其他\end{cases}$$

故$\left(X,Y\right)$的概率密度为：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<y<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$

例1：设数X在区间(0,1)上随机取值，当观察到$X=x\left(0<x<1\right)$时，

数Y在区间$(x,1)$上随机取值，求Y的概率密度$f_Y(y)$。

已得：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & 0<x<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

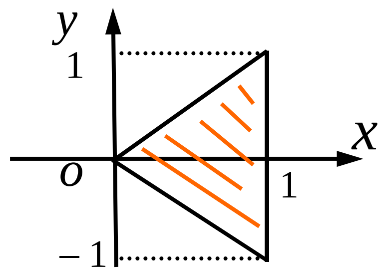


所以Y的边际概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\dfrac{1}{1-x}dx=-ln(1-y) & ,0<y<1\\ 0 & ，其他\end{cases}$$

例2：设随机变量(X,Y)在区域$|y|<x<1$内的密度函数是常数，之外为零，求$f_{X|Y}(x|y)$及$P(X>\frac{2}{3}\big|Y=\frac{1}{2})$.

解：概率密度$f(x,y)$的非零区域如图所示。



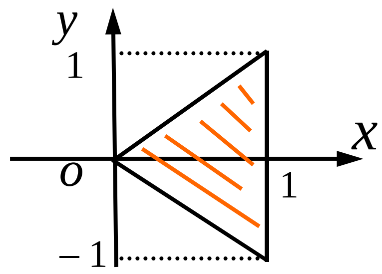
设 $f(x,y)=\begin{cases} k, & |y|<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} kdy=k\int_0^1 2xdx=k$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_{|y|}^{1} dx=1-|y|\text{，} & -1<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

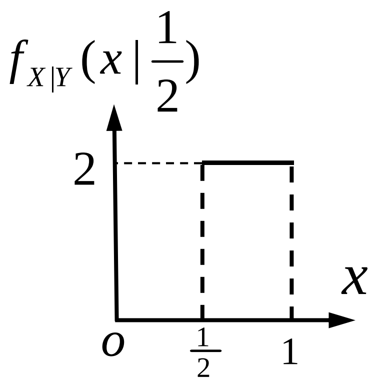
例2：设随机变量(X,Y)在区域$|y|<x<1$内的密度函数是常数，之外为零，求$f_{X|Y}(x|y)$及$P(X>\frac{2}{3}\big|Y=\frac{1}{2})$.

于是给定$y\,(-1<y<1)$，X的条件概率密度为：



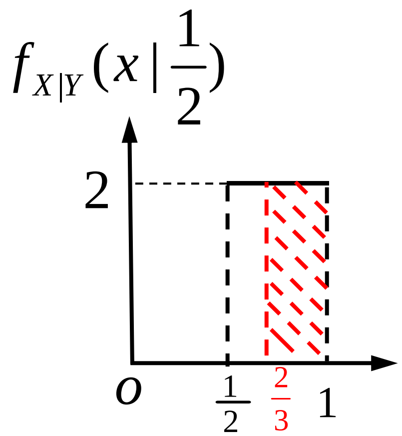
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$y=\dfrac{1}{2}$时，$$f_{X|Y}(x|\tfrac{1}{2})=\begin{cases}2, & \dfrac{1}{2}<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



例2：设随机变量(X,Y)在区域$|y|<x<1$内的密度函数是常数，之外为零，求$f_{X|Y}(x\mid y)$及$P(X>\frac{2}{3}\big|Y=\frac{1}{2})$.

已得：$f_{X|Y}(x\mid\frac{1}{2})=\begin{cases}2, & \frac{1}{2}<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$



$$P(X>\frac{2}{3}\Big|Y=\frac{1}{2})=\int_{2/3}^{\infty}f_{X|Y}(x\big|\tfrac{1}{2})dx$$

$$=\int_{2/3}^{1}2dx+\int_{1}^{\infty}0dx=\frac{2}{3}$$

例3：设有一件工作需要甲乙两人接力完成，完成时间不能超过30分钟。设甲先干了X分钟，再由乙完成，加起来共用Y分钟。若

$X\sim U(0, 30)$，在$X=x$条件下，$Y\sim U(x, 30)$。

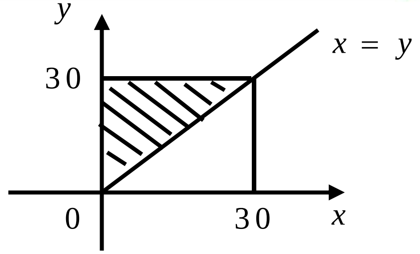
(1) 求(X, Y)的联合概率密度及条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$;

(2) 当已知两人共花了25分钟完成工作时，求甲的工作时间不超过10分钟的概率。

解: (1) 已知 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30}, & 0<x<30\\ 0, & 其它\end{cases}$

当x为(0,30)上一固定值时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30-x}, & x<y<30\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{30(30-x)}, & 0<x<y<30\\ 0, & 其它\end{cases}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{30(30-x)}dx = \frac{1}{30}\ln\frac{30}{(30-y)}, & 0<y<30 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当$0<y<30$时，

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(30-x)\ln\frac{30}{(30-y)}}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 已得：当$0<y<30$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(30-x)\ln\frac{30}{(30-y)}}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$P(X\le 10|Y=25)=\int_0^{10} f_{X|Y}(x|25)dx$$

$$=\int_0^{10}\frac{1}{(30-x)\ln 6}dx=\frac{\ln 30-\ln 20}{\ln 6}\approx 0.2263$$

二元离散型与连续型随机变量分布比较

二元离散型随机变量	二元连续型随机变量
(X,Y)联合分布律	(X,Y)联合概率密度
$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}, i,j=1,2,\ldots$	$f(x,y),\quad (x,y)\in D$
X的边际分布律	X的边际概率密度
$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}, i=1,2,\ldots$	$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$
$X=x_i$时Y的条件分布律	$X=x$时Y的条件概率密度
$P(Y=y_j \mid X=x_i)=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, j=1,2,\ldots$	$f_{Y\mid X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad y\in D_x$