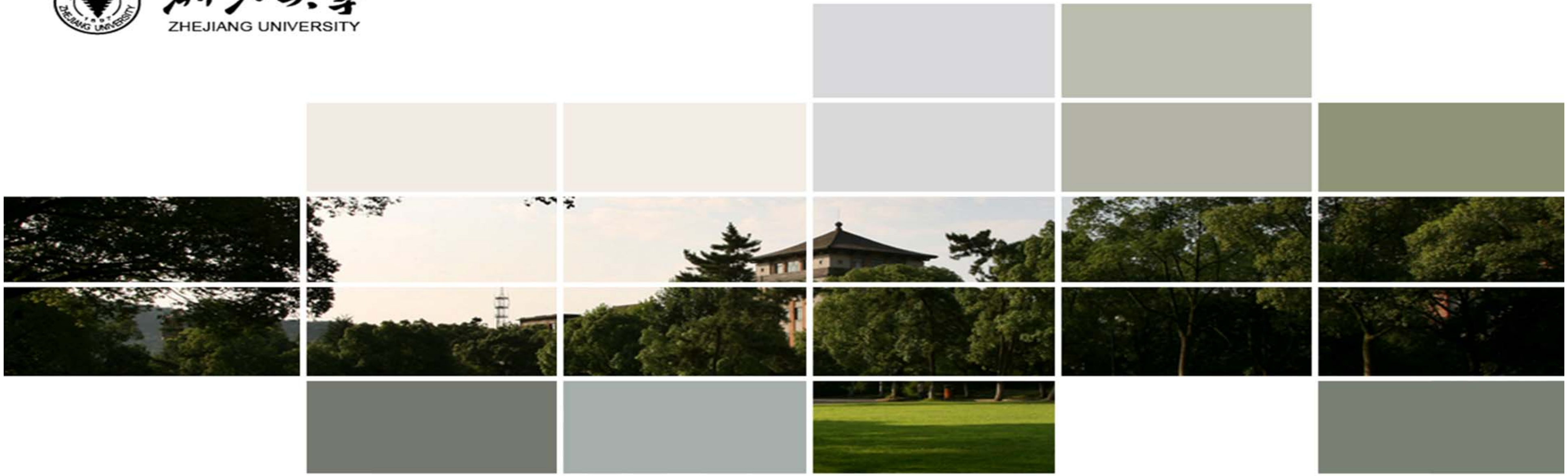
浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY



第20讲　二元连续型随机变量 边际概率密度

（二） 边际概率密度

二元随机变量(X,Y)分布函数$F(x,y)$，它们的边际分布函数分别为：

$$F_X(x)=F(x,+\infty)$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

对于连续型随机变量(X,Y)，概率密度为$f(x,y)$，X,Y的边际概率密度为：

$$\boxed{\begin{aligned} f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \\ f_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \end{aligned}}$$

事实上，

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = P(X \le x, Y < +\infty)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy \right] du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

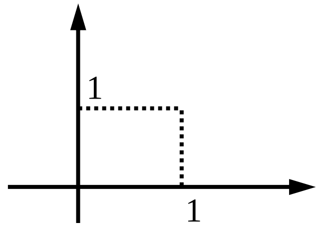
同理：

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = P(X < +\infty, Y \le y)$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dx \right] dv = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv$$

例1：设(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}4xy, 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

分别求X与Y的边际概率密度$f_X(x), f_Y(y)$.



解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

当$x\le 0$或$x\ge 1$时，$f(x,y)=0$，则$f_X(x)=0$

当$0<x<1$时，$f_X(x)=\int_0^1 4xydy=2x$

$$\therefore f_X(x)=\begin{cases}2x, 0<x<1\\ 0 \qquad ,其他\end{cases}$$

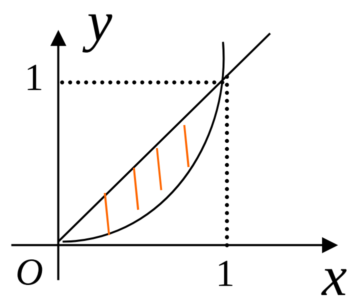
同理得，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^1 4xydx=2y, 0<y<1\\ 0 \qquad ,其他\end{cases}$$

例2：设(X,Y)在区域$x^2 \le y \le x$内密度函数为常数，

其余地方为零，求边际概率密度$f_X(x), f_Y(y)$。



解：画出图形，并设 $f(x,y)=\begin{cases} k, x^2 \le y \le x \\ 0, \quad\quad 其他 \end{cases}$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} kdy \quad \Rightarrow k=6$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6dy=6(x-x^2) & ,0\le x\le 1 \\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx=6(\sqrt{y}-y) & ,0\le y\le 1 \\ 0, & 其他\end{cases}$$