浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第2讲 事件的相互关系及运算

例1：甲、乙两人进行投骰子比赛，得点数大者为胜，若甲先投得了5点，分析乙胜负情况。

解：乙投一骰子所有可能结果构成样本空间：

S={1, 2, 3, 4, 5, 6}

“乙赢”={6} $= A$

“平局”={5} $= B$

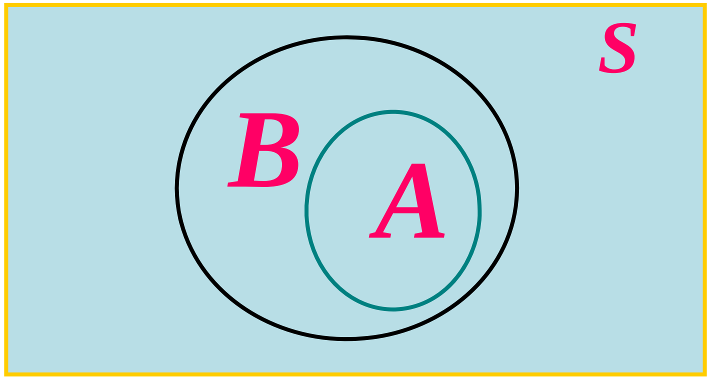
“乙输”={1, 2, 3, 4} $= C$

“乙不输”由A与B的合并组成{5，6}.

❖事件的关系（包含、相等）

1° $A \subset B$: 事件A发生一定导致B发生.

2° $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$



例2：

$$A=\{\text{明天天晴}\}$$
$$B=\{\text{明天无雨}\}$$

$$\Rightarrow A\subset B$$

$$A=\{\text{有多于4人候车}\}$$
$$B=\{\text{至少有5人候车}\}$$

$$\Rightarrow B=A$$

一枚硬币抛两次，

$$A=\{\text{第一次是正面}\},$$
$$B=\{\text{至少有一次正面}\}$$

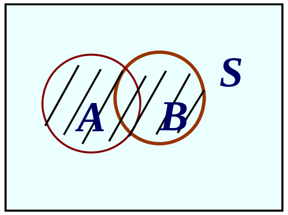
$$\Rightarrow B\supset A$$

事件的运算及关系

- ✓ A与B的和事件，记为$A \cup B$

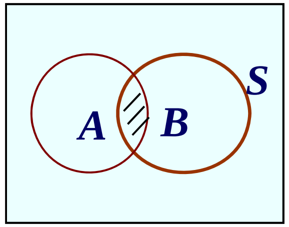
  $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ 或 $x \in B \}$：

  A与B至少有一发生.



- ✓ A与B的积事件，记为$A \cap B$, $A \cdot B$, AB

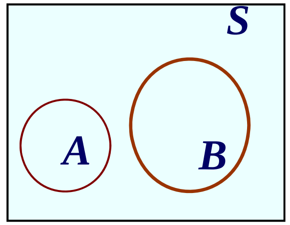
  $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ 且 $x \in B \}$：A与B同时发生.



$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \rightarrow$ 表示$A_1, A_2, \cdots A_n$至少有一发生

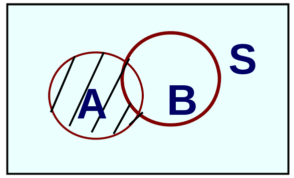
$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \rightarrow$ 表示$A_1, A_2, \cdots A_n$同时发生

- ✓ 当$AB=\varnothing$时，称事件A与B不相容或互斥.



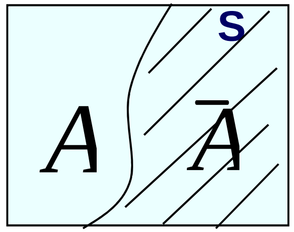
- ✓ A与B的差事件

$$A-B=\{\,x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\,\}$$



- ✓ A的逆事件,记为$\bar{A}$,也称A的互逆、对立事件.

$$A\cup\bar{A}=S,\ \ A\bar{A}=\varnothing,\ \ \bar{\bar{A}}=A$$



➡ A与B的差事件可以表示为：

$$A-B=A\bar{B}=A\cup B-B=A-AB$$

事件的运算定律

交换律：$A\cup B=B\cup A$ ，$A\cap B=B\cap A$;

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$， $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

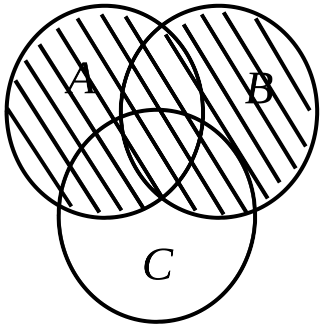
分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ ，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; (德·摩根定律)

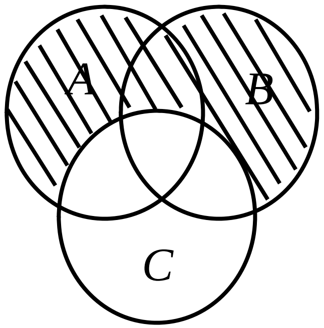
对偶律推广：$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$;

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n.$$

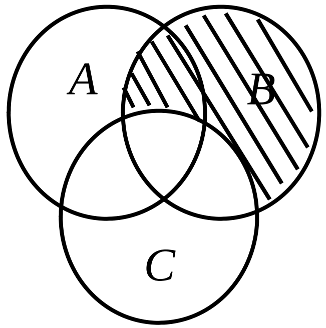
用维恩图验证事件等式"$(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$"是否成立?



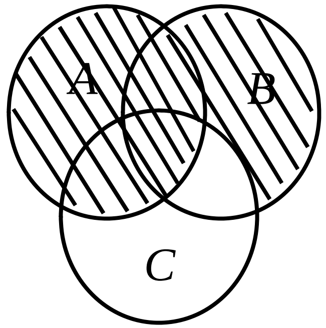
$(A \cup B)$



$(A \cup B) - C$



$(B - C)$



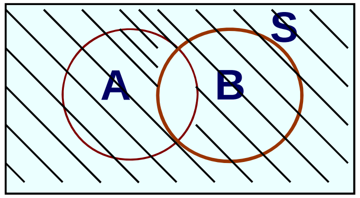
$A \cup (B - C)$

所以$(A \cup B) - C \neq A \cup (B - C)$

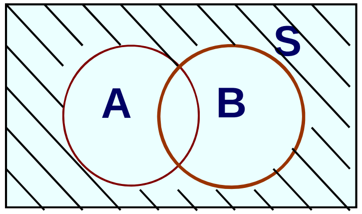
$$((A \cup B) - C) \cup AC = A \cup (B - C)$$

注意 $\overline{AB}$ 与 $\bar{A}\,\bar{B}$ 的区别：

$\overline{AB}$是表示 A、B不同时发生



$\bar{A}\,\bar{B}$是表示 A、B都不发生



实际上两者有关系：

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B$$

例3：设A={甲来听课}, B={乙来听课}, 则：

$A\bigcup B=$ {甲、乙至少有一人来}

$A\bigcap B=$ {甲、乙都来}

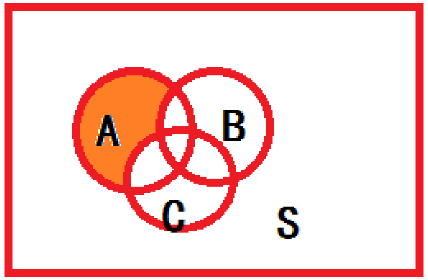
$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\overline{B}=$ {甲、乙都不来}

$\overline{A}\bigcup\overline{B}=\overline{AB}=$ {甲、乙至少有一人不来}

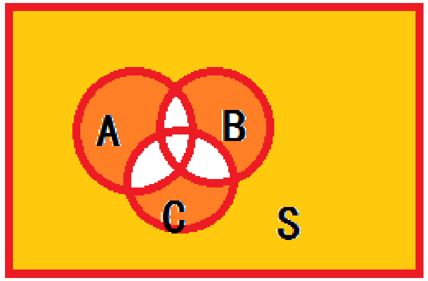
= {甲、乙中最多有一人来}

例4：用A、B、C三个事件关系及运算表示下列各事件

- A发生，B、C都不发生：$A\bar{B}\bar{C}=A-B-C$



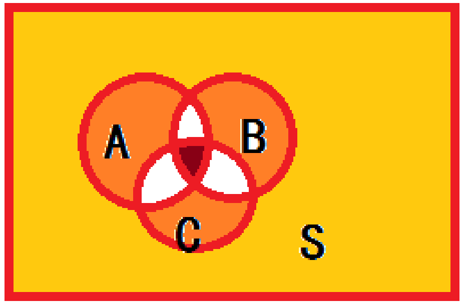
- 恰有一个发生：$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$



- 至少有一个发生：$A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$

$$=(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C})\cup ABC$$

例4：用A、B、C三个事件关系及运算表示下列各事件



- 至少有两个发生： $AB \cup AC \cup BC$

$$= \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup ABC$$

- 至少有一个不发生：$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} = \overline{ABC}$

$$= \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$