浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

第19讲　二元连续型随机变量，联合概率密度

（一） 联合概率密度函数

定义：对于二元随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，

如果存在非负函数$f(x,y)$，使对于任意x,y，

有
$$\boxed{F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv}$$

称(X,Y)为二元连续型随机变量.

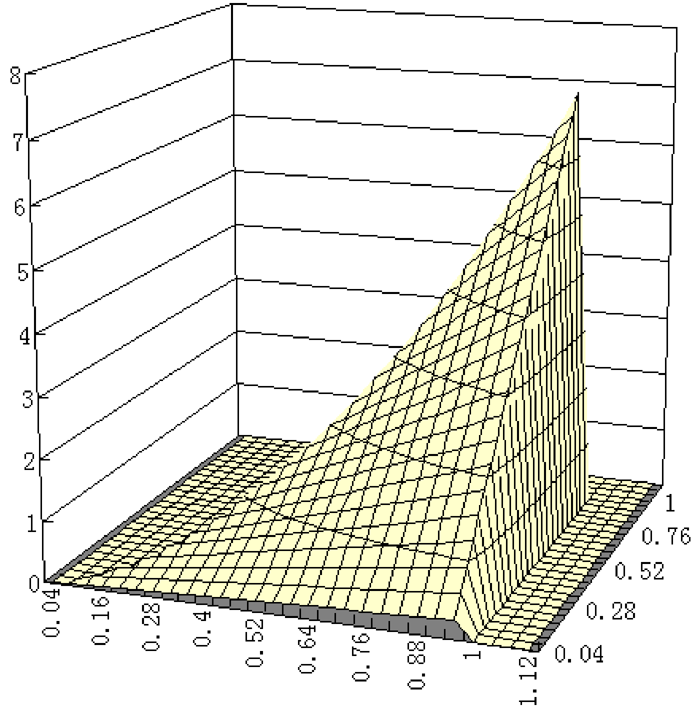
并称$f(x,y)$为二元随机变量(X,Y)的

(联合)概率密度（函数）。

概率密度的性质：

- 1. $f(x,y) \geq 0$
- 2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$

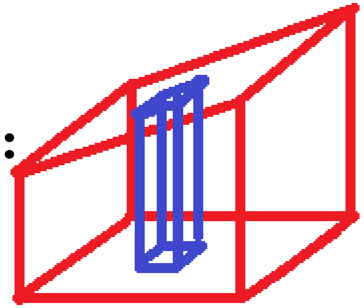
注：在几何上，$z = f(x,y)$ 表示空间的一个顶曲面，介于它和xoy平面的空间区域的体积为1。



图为$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

概率密度的性质：

- 3. 设D是xoy平面上的区域，点(X,Y)落在D内的概率为：



$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy$$

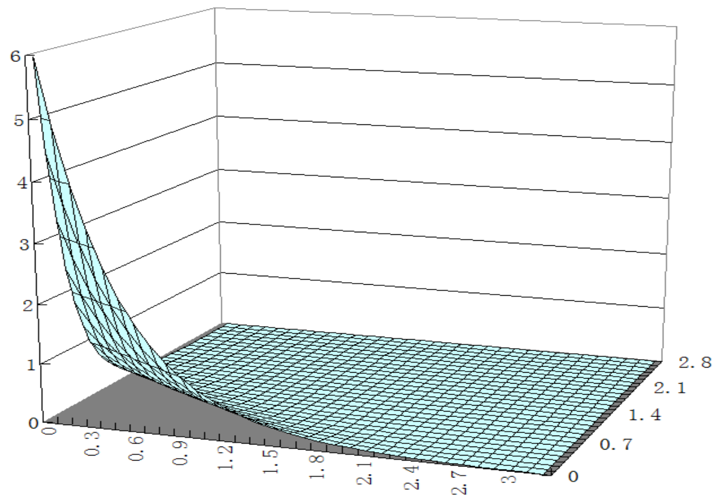
注：$P((X,Y)\in D)$等于以D为底，以曲面$z=f(x,y)$为顶面的柱体体积。所以(X,Y)落在面积为零的区域的概率为零。

$$P(x<X<x+\Delta x, y<Y<y+\Delta y)\approx f(x,y)\Delta x\Delta y.$$

- 4. 在$f(x,y)$的连续点(x,y)，有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$

例1: 设二元随机变量(X,Y)具有概率密度:

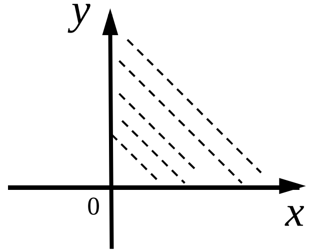
$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



(1)求常数k; (2)求分布函数$F(x,y)$;

(3)求$P(Y\le X)$的概率.

解: (1) $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$

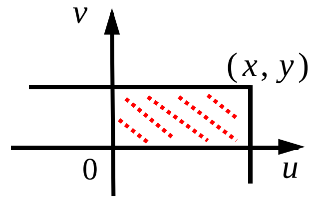


$$=\int_0^{\infty}dx\ \int_0^{\infty}ke^{-(2x+3y)}dy=k\int_0^{\infty}e^{-2x}dx\int_0^{\infty}e^{-3y}dy$$

$$=k\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)_0^{\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3y}\right)_0^{\infty}=k/6\quad\Rightarrow k=6$$

前面已得： $f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$(2)\ F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

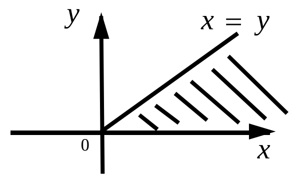


$$=\begin{cases}\int_0^x du\int_0^y 6e^{-(2u+3v)}dv, & x>0,y>0\\ 0\,, & \text{除第1象限}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 2e^{-2u}du\int_0^y 3e^{-3v}dv, & x>0,y>0\\ 0\,, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

前面已得： $f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$



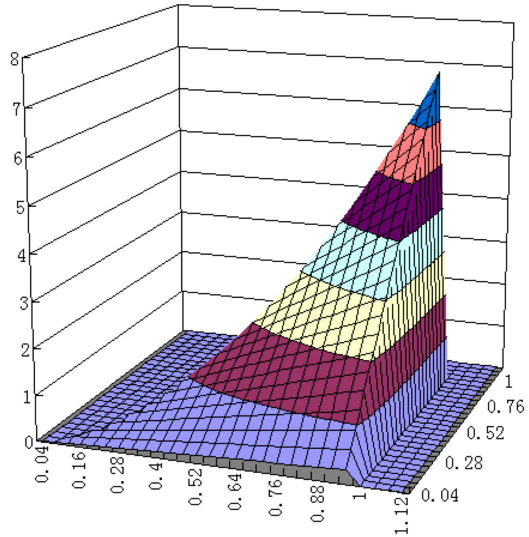
$$(3)\ P(Y\le X)=\iint\limits_{y\le x} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}dy\int_y^{\infty}6e^{-(2x+3y)}dx=\int_0^{\infty}3e^{-3y}e^{-2y}dy$$

$$=\int_0^{\infty}3e^{-5y}dy=-\frac{3}{5}e^{-5y}\Big|_0^{\infty}=\frac{3}{5}$$

$$\text{或}\ P(Y\le X)=\int_0^{\infty}dx\int_0^{x}6e^{-(2x+3y)}dy$$

例2：设二元随机变量(X,Y)具有概率密度



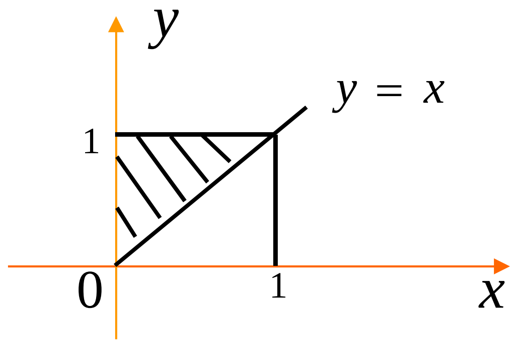
$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1)求常数k；(2)求概率$P(X+Y\le 1)$.

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dy\int_0^y kxydx$$

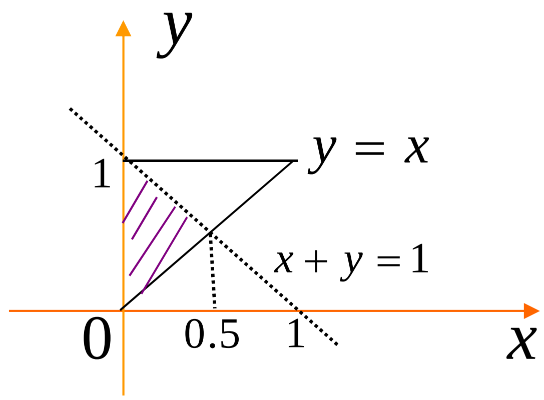
$$=\int_0^1 \frac{k}{2}y^3dy=\frac{k}{8} \quad \Rightarrow k=8$$



$$(2)\ P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_0^{0.5}dx\int_x^{1-x}8xydy$$

$$=\int_0^{0.5}4x(1-2x)dx=\frac{1}{6}$$



或者

$$=\int_0^{0.5}dy\int_0^{y}8xydx+\int_{0.5}^{1}dy\int_0^{1-y}8xydx=\frac{1}{6}$$