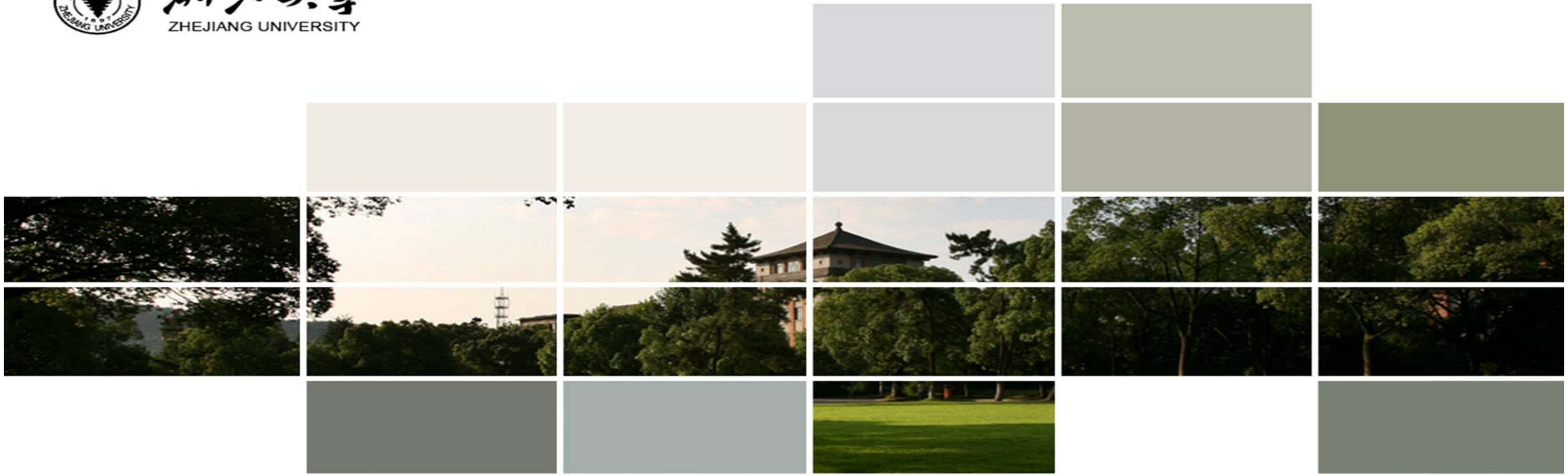
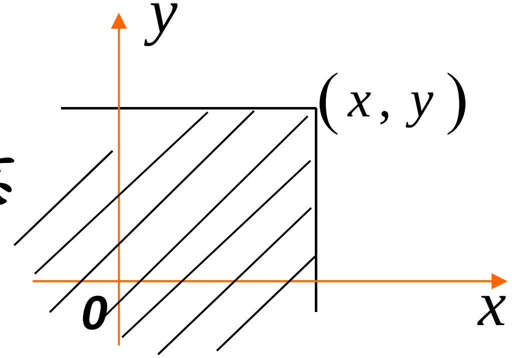
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第18讲　二元随机变量分布函数、边际分布函数及条件分布函数

（一） 联合分布函数



定义：设(X,Y)是二元随机变量，对于任意实数x, y，二元函数

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\cap(Y\le y)\}\overset{\text{记成}}{=}P(X\le x,Y\le y)$$

称为二元随机变量(X,Y)的**联合分布函数**。

例1：设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，随机变量Y在1～X中等可能地取一整数值，求$F(3.5,2)$.

在第16讲例4中，已得(X,Y)的联合概率分布律为：

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

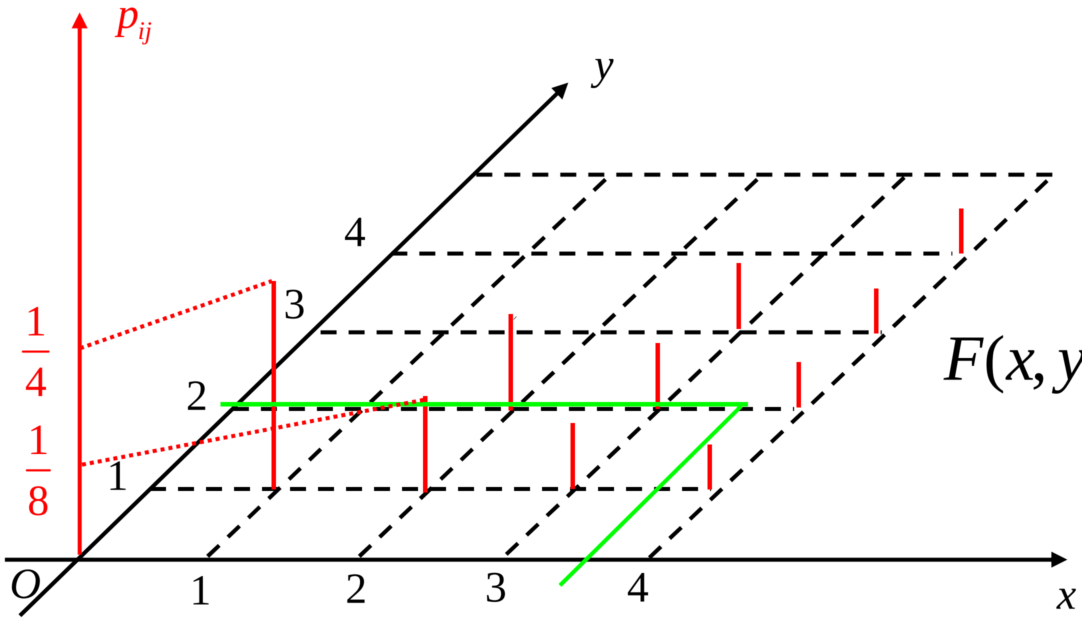
$$F(3.5,2) = P(X \le 3.5, Y \le 2)$$

$$= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

一般得：$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$

$$= \sum_{x_i \le x,\, y_j \le y} P(X = x_i, Y = y_j)$$

二元离散型随机变量概率分布图



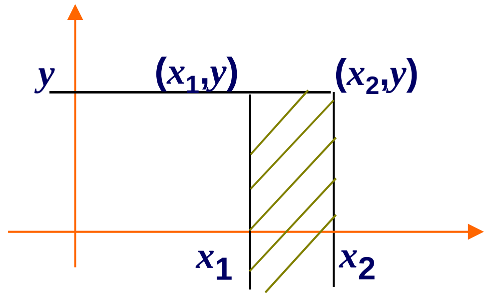
$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<1\text{或}y<1\\ 1/4, & 1\le x<2, y\ge 1\\ & \cdots \\ 2/3, & 3\le x<4, 2\le y<3\\ & \cdots \\ 1, & x\ge 4, y\ge 4\end{cases}$$

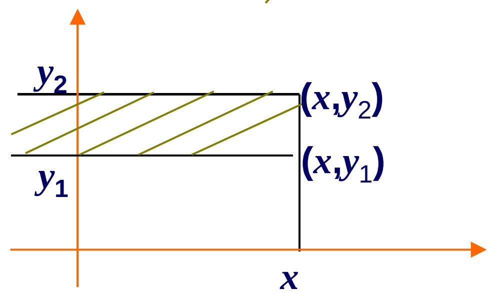
分布函数$F(x,y)$的性质：

1° $F(x,y)$关于x,y单调不减，即：

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1,y) \le F(x_2,y)$$

$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x,y_1) \le F(x,y_2)$$





2° $0 \le F(x,y) \le 1$，$F(+\infty,+\infty) = 1$

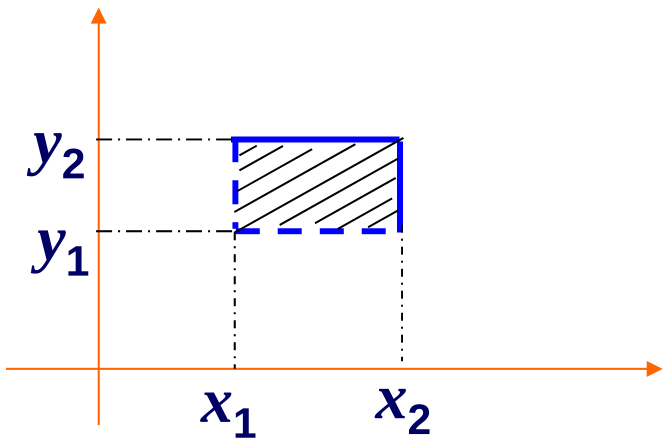
对任意x及y有：

$$F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$$

3° $F(x,y)$关于x,y右连续，即：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x+\varepsilon, y) = F(x,y) \text{ 以及}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} F(x, y+\varepsilon) = F(x,y)$$



4° 若$x_1 < x_2, y_1 < y_2$，则有

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) =$$

$$F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0.$$

（二） 边际分布函数

二元随机变量(X,Y)作为整体，有其联合分布函数$F(x,y)$，X和Y也有它们自己的分布函数，分别记为：$F_X(x)$, $F_Y(y)$，并称他们为**边际分布函数**。

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)$$

即在分布函数$F(x,y)$中令$y\to+\infty$，就能得到$F_X(x)$，

同理：$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)$.

证：$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x,Y<+\infty)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$

例2：设（X，Y)的分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求X的边际分布函数$F_X(x)$。

解：$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{y\to+\infty}(1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}), & x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x\geq 0\\ 0 & ,x<0\end{cases}$$

（三） 条件分布函数

定义：

若$P(Y=y)>0$，则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数为：

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\frac{P(X\le x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

若Y为离散随机变量，就可满足$P(Y=y)>0$,

但当Y为连续随机变量时，显然$P(Y=y)$=0,

所以这时不能这样定义条件分布函数。

若$P(Y=y)=0$, 但对任一$\varepsilon>0, P(y<Y\le y+\varepsilon)>0,$
则在$Y=y$条件下，X的条件分布函数定义为：

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to0^+}P(X\le x|y<Y\le y+\varepsilon)$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P(X\le x,y<Y\le y+\varepsilon)}{P(y<Y\le y+\varepsilon)}$$

此时仍记为$P(X\le x|Y=y)$.

即：$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)$.

例3：设$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.3, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 0.4, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$，

$P(X=1,Y=0)=0.1$，求 (1)联合分布律；

(2) 当$Y=0$时，X的条件分布律$P(X=k|Y=0)$；

（3）$Y=0$时X的条件分布函数。

解:(1) 由分布函数知，这两个变量是离散型的，分布律先写在联合分布律表中。注意：

$P(X=x_0)=F(x_0)-F(x_0-0)$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	

$$(2)P(X=k|Y=0)=\frac{P(X=k,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{P(X=k,Y=0)}{0.4}\quad ,k=1,2$$

X	1	2
$P(X=k\|Y=0)$	0.25	0.75

X \ Y	0	1	$p_{i\bullet}$
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
$p_{\bullet j}$	0.4	0.6	

$$(3)F_{X|Y}(x|0)=P(X\le x|Y=0)$$

$$=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.25, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$