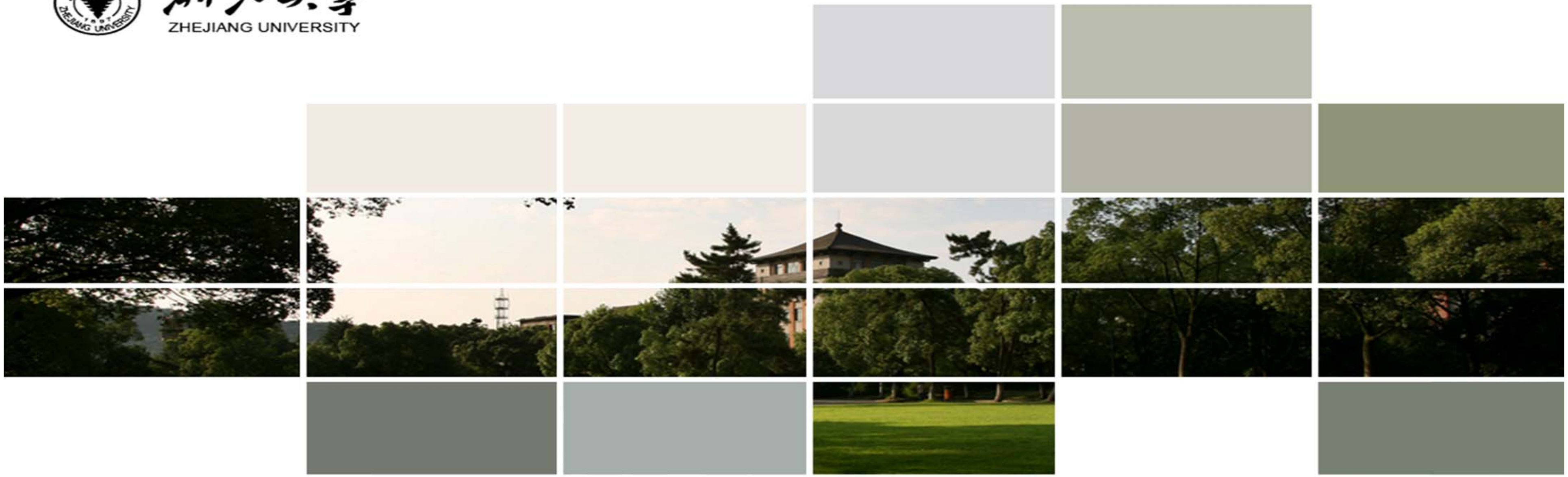
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第17讲　二元离散型随机变量
边际分布律与条件分布律

（二）边际分布

对于离散型随机变量(X,Y)，分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij} \quad , \quad i,j=1,2,\cdots$$

必然事件

X,Y的边际分布律为：

$$P(X=x_i)=P(X=x_i, \bigcup_{j=1}^{\infty}(Y=y_j))=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij} \overset{\text{记为}}{=} p_{i\bullet}$$

同理，$P(Y=y_j)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X=x_i)\ ,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij} \overset{\text{记为}}{=} p_{\bullet j}$

必然事件

注意：记号$p_{i\bullet}$表示是由p_{ij}关于j求和后得到的；

同样$p_{\bullet j}$是由p_{ij}关于i求和后得到的.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例1：盒中装有3只红球,2只白球，现分两次从中任取1球，以X、Y分别表示第1、2次取到的红球数。采用不放回与放回抽样分别求：X，Y的联合分布律及边际分布律。

解：$X=\begin{cases}0, & \text{第1次取到白球}\\ 1, & \text{第1次取到红球}\end{cases}$，$Y=\begin{cases}0, & \text{第2次取到白球}\\ 1, & \text{第2次取到红球}\end{cases}$

例1：盒中装有3只红球,2只白球，现分两次从中任取1球，以 X、Y分别表示第1、2次取到的红球数。采用不放回与放回抽样分别求：X，Y的联合分布律及边际分布律。

不放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

例1：盒中装有3只红球,2只白球，现分两次从中任取1球，以 X、Y分别表示第1、2次取到的红球数。采用不放回与放回抽样分别求：X，Y的联合分布律及边际分布律。

放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	

以上两表中，联合分布律不同，但它们的边际分布律相同；这就说明了，仅由边际分布一般不能得到联合分布。

例2：设一群体80%的人不吸烟，15%的人少量吸烟，5%的人吸烟较多，且已知近期他们患呼吸道疾病的概率分别为5%，25%，70%。记

$$X=\begin{cases}0, & \text{不吸烟}\\ 1, & \text{少量吸烟}\\ 2, & \text{吸烟较多}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{患病}\\ 0, & \text{不患病}\end{cases}$$

求：(1) (X,Y)的联合分布和边际分布；

(2) 求患病人中是吸烟者的概率.

解:(1)由题意可得:

X	0	1	2
P	0.8	0.15	0.05

$P\{Y=1 \mid X=0\}=0.05,\ P\{Y=1 \mid X=1\}=0.25,$
$P\{Y=1 \mid X=2\}=0.70,$

由乘法公式: $P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j \mid X=i\}$

$X \backslash Y$	**0**	**1**	$P(X=i)$
0	**0.76**	**0.04**	**0.80**
1	**0.1125**	**0.0375**	**0.15**
2	**0.015**	**0.035**	**0.05**
$P(Y=j)$	**0.8875**	**0.1125**	**1**

解(2) P(患病人中是吸烟者)

$$= P\{(X=1)\cup(X=2)\mid Y=1\}$$

$$\overset{\text{不相容}}{=} P\{X=1\mid Y=1\}+P\{X=2\mid Y=1\}$$

$$= \frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}+\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}$$

$$= \frac{0.0375+0.035}{0.1125}=0.6444.$$

（三）条件分布

对于两个事件A,B，若$P(A)>0$,可以考虑条件概率$P(B|A)$,

对于二元离散型随机变量(X,Y)，设其分布律为

$$P(X=x_i\ ,Y=y_j)=p_{ij}\quad i,j=1,2,\cdots$$

若$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$, 考虑条件概率 $P(X=x_i\,|\,Y=y_j)$

由条件概率公式可得：

$$P(X=x_i\,|\,Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

当X取遍所有可能的值，就得到了条件分布律.

定义：设(X,Y)是二元离散型随机变量，

对于固定的y_j，若 $P(Y=y_j)>0$，则称：

$$P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad i=1,2\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下，随机变量X的条件分布律；

同样，对于固定的x_i，若 $P(X=x_i)>0$，则称：

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,\ Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad j=1,2\cdots$$

为在$X=x_i$条件下，随机变量Y的条件分布律.

例3：盒中装有3只红球，4只黑球，3只白球，在其中不放回取2球，以X表示取到红球的只数，Y表示取到黑球的只数。求（1）X,Y的联合分布律；（2）$X=1$时Y的条件分布律.

解：**(1)**X,Y的取值均为**0,1,2**

$$P(X=0,Y=0)=\frac{C_3^0C_4^0C_3^2}{C_{10}^2}$$

$$P(X=i,Y=j)=\frac{C_3^iC_4^jC_3^{2-i-j}}{C_{10}^2}$$

$i,j=0,1,2,\ i+j\le 2.$

X\Y	0	1	2
0	1/15	4/15	2/15
1	3/15	4/15	0
2	1/15	0	0

由于 $P(X=1)=7/15$,

故在$X=1$的条件下, Y的分布律为:

$$P(Y=0|X=1)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}=\frac{3}{7}$$

$$P(Y=1|X=1)=\frac{4}{7},$$

$$P(Y=2|X=1)=0.$$

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/15	4/15	2/15
1	3/15	4/15	0
2	1/15	0	0

Y	0	1	2
$P(Y=j\|X=1)$	3/7	4/7	0

例4：(*X*,*Y*)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	a	0.2	0.2
2	0.1	0.1	b

已知$P(Y \le 0 \mid X < 2) = 0.5.$

求：(1)*a*,*b*的值；

(2){*X*=2}条件下*Y*的条件分布律；

(3){*X*+*Y*=2}条件下*X*的条件分布律.

解：(1)考虑包含a,b的方程$\begin{cases} a+b+0.6=1 \\ P(Y\le 0\mid X<2)=0.5 \end{cases}$

$$0.5=P(Y\le 0\mid X<2)=\frac{P(X<2,Y\le 0)}{P(X<2)}=\frac{P(X=1,\{Y=-1\}\cup\{Y=0\})}{P(X=1)}$$

$$=\frac{P(X=1,Y=-1)+P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}$$

$$=\frac{a+0.2}{a+0.4},$$

$$\Rightarrow a=0\quad,\quad b=0.4$$

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	a	0.2	0.2
2	0.1	0.1	b

浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

解：(2) $P(X=2)=0.1+0.1+b=0.6$

$$\Rightarrow P(Y=j\,|\,X=2)=\frac{P(X=2,Y=j)}{P(X=2)}=\begin{cases}1/6, & j=-1\\ 1/6, & j=0\\ 2/3, & j=1\end{cases}$$

Y	-1	0	1
$P(Y=j\,|\,X=2)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.4

解:(3) $P(X+Y=2)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)$

$$=0.2+0.1=0.3$$

$$\Rightarrow P(X=i\,|\,X+Y=2)=\frac{P(X=i,Y=2-i)}{P(X+Y=2)}=\begin{cases}2/3, & i=1\\ 1/3, & i=2\end{cases}$$

X	1	2
$P(X=i\|X+Y=2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	0	0.2	0.2
2	0.1	0.1	0.4