浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

第16讲　二元随机变量，离散型随机变量分布律

问题的提出

- 例1：研究学龄儿童的发育情况。

仅研究身高H或体重W是不够的。

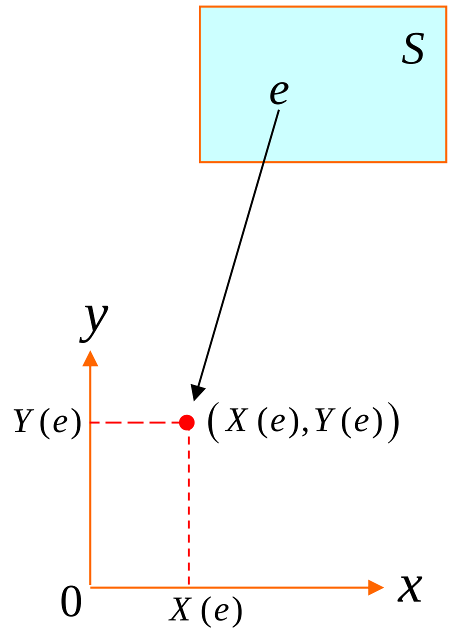
需要同时考察身高和体重，研究身高和体重之间的关系，这就要引入定义在同一样本空间的两个随机变量。

◆例2：研究某种型号炮弹的弹着点分布。每枚炮弹的弹着点位置需要由横坐标和纵坐标来确定，而它们是定义在同一样本空间的

两个随机变量。

二元随机变量

定义：设E是一个随机试验，样本空间$S=\{e\}$；设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的向量(X,Y)称为二维随机向量或二元随机变量。



二元离散型随机变量

定义：若二元随机变量(X,Y)全部可能取到的不同值是有限对或可列无限对，则称(X,Y)是二元离散型随机变量。

（一）离散随机变量的联合概率分布律

设(X,Y)所有可能取值为(x_i,y_j)，称

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}\quad,\ i,j=1,2,\cdots$$

为二元离散型随机变量

(X,Y)的**联合概率分布律**。

也可简称(X,Y)的分布律。

可用如图的表格来表示.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

联合分布律的性质

$1^\circ \quad p_{ij} \geq 0,$

$2^\circ \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

$3^\circ \quad P((X,Y)\in D) = \sum_{(x_i,y_j)\in D} p_{ij}$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$

D

其中 $p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right),\ i, j = 1, 2, \cdots$

例3: 一盒子中有10件产品，其中6件正品,4件次品。从中取1件产品检验，不放回，再取1件检验。引入如下的随机变量X与Y,

$$X=\begin{cases}0, & \text{第1次取到次品}\\ 1, & \text{第1次取到正品}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}0, & \text{第2次取到次品}\\ 1, & \text{第2次取到正品}\end{cases},$$

求(X,Y)的联合分布律。

解：(X,Y)可能的取值数对有：(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

由乘法公式$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$得：

$$P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0\mid X=0)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15},$$

同理得：$P(X=0,Y=1)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$,

$$P(X=1,Y=0)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15},\quad P(X=1,Y=1)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{15}.$$

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

例4：设随机变量X在1、2、3、4四个整数中等可能地取一个值，另一个随机变量Y在$1\sim X$中等可能地取一整数值，试求(X,Y)的联合概率分布及X、Y的分布。

解：X、Y的取值情况均为1, 2, 3, 4；当$i, j=1,\cdots,4$时，

$$P(X=i,Y=j)$$
$$=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{4}\times\frac{1}{i} & ,i\ge j\\ \frac{1}{4}\times 0 & ,i<j\end{cases}$$

联合概率分布律

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

如何求X、Y的分布律？

显然，$P(X=i)=1/4\quad,i=1,2,3,4.$

事件$\{X=1\},\cdots,\{X=4\}$是$\{Y=j\}$前导事件组，由全概率公式得：

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{4}P(X=i)P(Y=j|X=i)$$

$$j=1,2,3,4.$$

可见，X、Y的分布律就是在联合分布律表中横向、纵向相加！

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

例5：袋中有1个红球，2个黑球，3个白球，现有放回地取两次，每次取一球，以X,Y,Z分别表示两次取球所得的红、黑、白球个数。求：

(1)$P(X=1|Z=0)$ (2) $P(X=1,Z=0)$ (3)(X,Y)概率分布.

解：(1) $P(X=1|Z=0)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

红 黑 黑 红

(2) $P(X=1,Z=0)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

红黑 黑红

注意两者的区别！

例5：袋中有1个红球，2个黑球，3个白球，现有放回地取两次，每次取一球，以X,Y,Z分别表示两次取球所得的红、黑、白球个数。求：
(1)$P(X=1|Z=0)$ (2) $P(X=1,Z=0)$ (3)(X,Y)概率分布.

解：(3) X,Y的取值范围均为0,1,2.

$$P(X=0,Y=0)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$ 2球均为白球

$$P(X=0,Y=1)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times 2=\frac{1}{3}$$ 黑白或白黑

$$P(X=1,Y=2)=0$$ 总数超2只，不可能！

$$P(X=2,Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$ 2球均为红球

其余类似得到！

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0