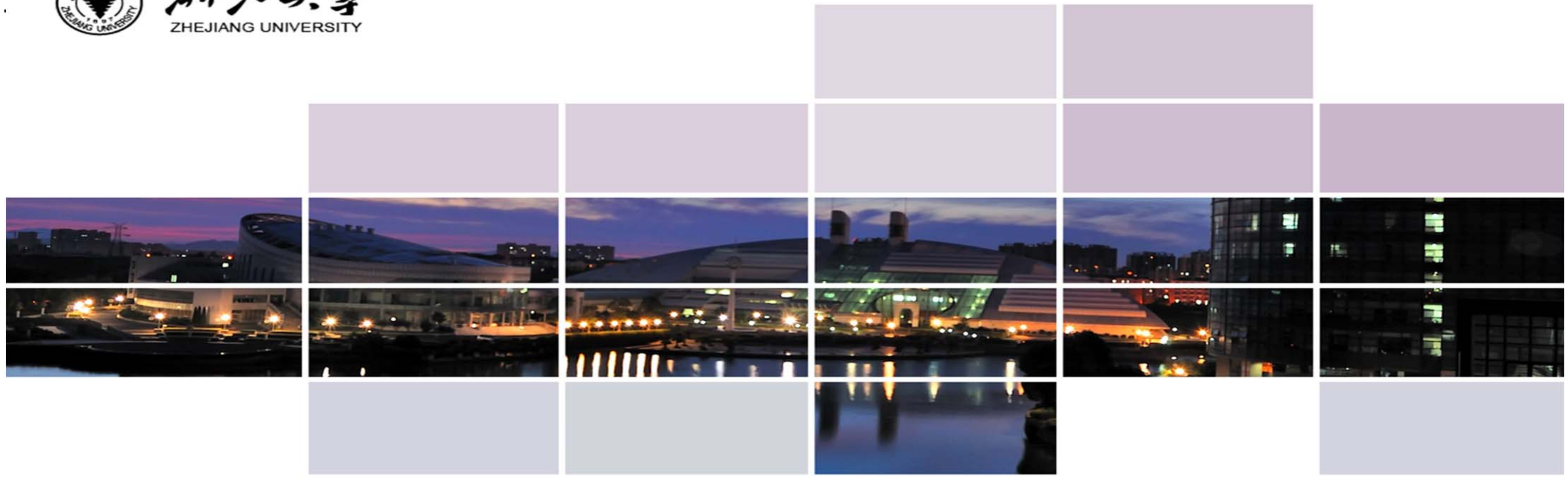


第15讲 随机变量函数的分布

- 若要得到一个圆的面积Y，总是测量其半径，半径的测量值可看作随机变量X，若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Y=\pi X^2$的分布是什么？
- 若已知体重$W(kg)$均服从正态分布,在身高$L(m)$确定的情形下,则体质指数$BMI=W/L^2$服从什么分布？

问题：已知随机变量X的分布，$Y=g\left(X\right)$，

函数$g\left(\cdot\right)$已知，求Y的分布.

例1： 设随机变量X的概率分布律为

X	-1	0	1
P	0.1	0.6	0.3

$Y=X^2$，求Y的概率分布律.

解： 因为X的可能取值为$-1,0$和1,而$Y=X^2$,

故可知Y的可能取值为0和1.

又因为$Y=X^2$,从而

$$\{Y=0\}=\{X=0\},\quad \{Y=1\}=\left\{(X=1)\cup(X=-1)\right\}$$

因此 $P(Y=0)=P(X=0)=0.6,$

$$P(Y=1)=P\left\{(X=1)\cup(X=-1)\right\}$$

$$=P(X=1)+P(X=-1)=0.4.$$

Y	0	1
P	0.6	0.4

例2: 设随机变量X的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

求$Y=X^2$的概率密度函数.

解: 由题意知 $P(0<X<4)=1$, 从而 $P(0<Y<16)=1$.

故 $f_Y(y)=0$, 当 $y\notin(0,16)$时.

当 $y\in(0,16)$时, 先考察Y的分布函数:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{0\le X\le\sqrt{y}\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{t}{8}dt=\frac{y}{16},$$

$\because P\{-\sqrt{y}\le X<0\}=0.$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{1}{16}$. 即$Y$服从均匀分布$U(0,16)$.

或者

当 $y\in(0,16)$时，先考察Y的分布函数：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$\boxed{P\{X<-\sqrt{y}\}=0.}$$

$$=P\{X\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})$$

$$\boxed{f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}}$$

故 $f_Y(y)=F_X'(\sqrt{y})=f_X(\sqrt{y})\bullet\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{y}}{8}\bullet\dfrac{1}{2\sqrt{y}}=\dfrac{1}{16}.$

即Y服从均匀分布$U(0,16)$.

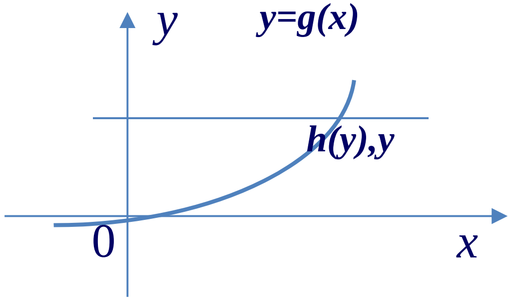
一般，若已知X的概率分布，$Y=g(X)$，求Y的概率分布的过程为：

先给出Y的可能取值；再利用等价事件来给出概率分布.

- 若X为离散型随机变量，则先写出Y的可能取值：$y_1,y_2,\cdots y_j,\cdots$；
  再找出$\{Y=y_j\}$的等价事件$\{X\in D\}$，得$P(Y=y_j)=P(X\in D)$；
- 若X为连续型随机变量，先根据X的取值范围，给出Y的取值范围；然后写出Y的概率分布函数：$F_Y(y)=P(Y\le y)$，找出$\{Y\le y\}$的等价事件$\{X\in D\}$，得$F_Y(y)=P(X\in D)$；再求出Y的概率密度函数$f_Y(y)$.

定理： 设随机变量$X \sim f_X(x), -\infty < x < +\infty$,

$Y = g(X)$, $g'(x) > 0$ (或$g'(x) < 0$), 则Y具有概率密度为：



$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注意：

- 这里(α, β)是Y的取值范围，其中：$\alpha = g(-\infty)$, $\beta = g(+\infty$

  当$g'(x) < 0$时$\alpha = g(+\infty)$, $\beta = g(-\infty)\}$.

- h是g的反函数, 即$h(y) = x \Leftrightarrow y = g(x)$.

例3： 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=aX+b(a\neq 0)$, 求Y的概率密度$f_Y(y)$.

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

解： $y=g(x)=ax+b,\ g'(x)=a\neq 0,$

$$x=h(y)=\left(y-b\right)/a,\ h'(y)=1/a,$$

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\bullet\frac{1}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\left(y-b\right)/a-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]\bullet\frac{1}{|a|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}}\Rightarrow Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$$

一般地，若随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则有

$$Y = aX + b \quad \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$X \sim N(1,3),\ Y = 3 - 2X$$

$$\Rightarrow Y \sim N(1,12).$$

$$\because a\mu + b = -2\times 1 + 3 = 1$$

$$a^2\sigma^2 = (-2)^2 \times 3 = 12$$