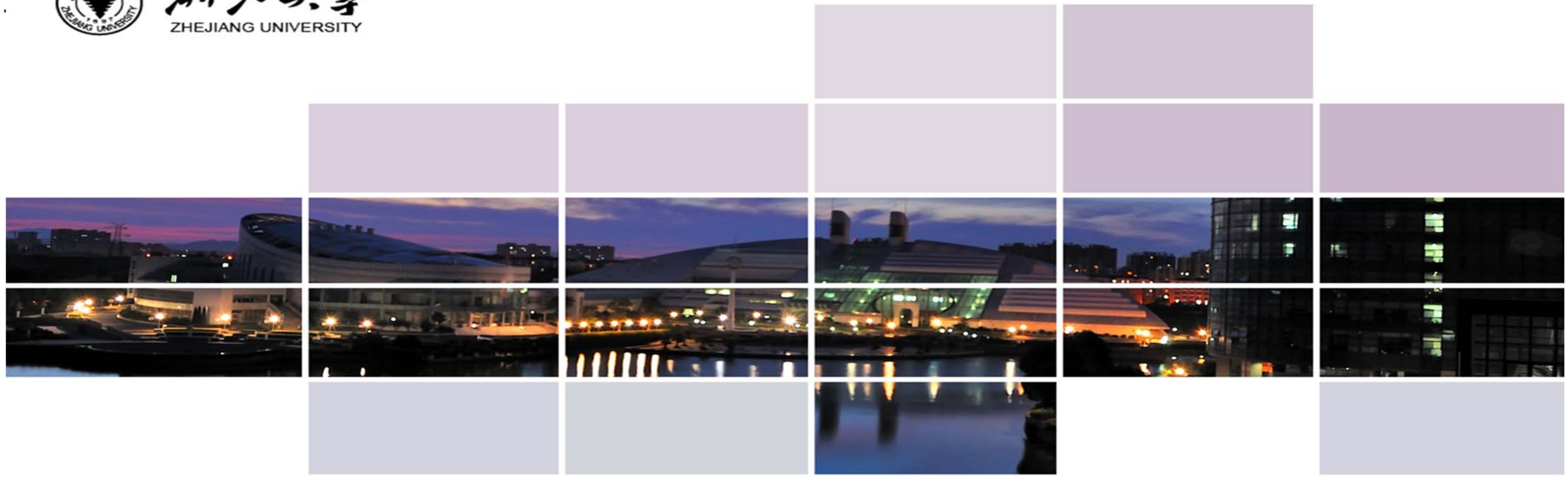
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第13讲 均匀分布和指数分布

均匀分布的定义:

若X的概率密度函数为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

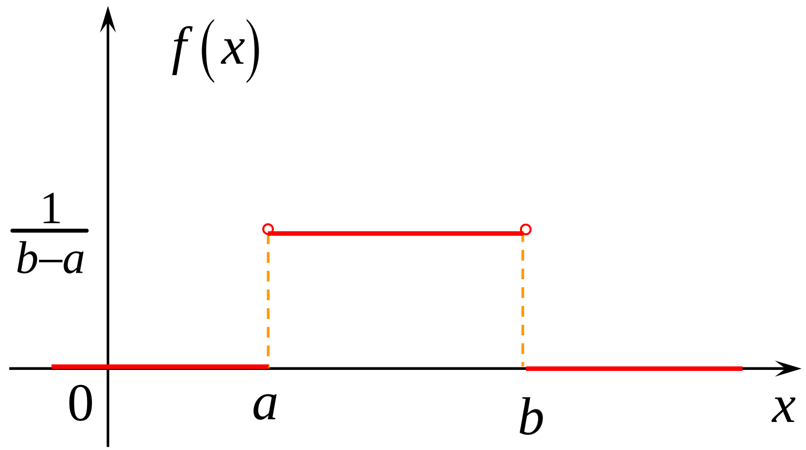
其中$a<b$,就称X服从(a,b)上的均匀分布(Uniform),

记为$X\sim U(a,b)$或$X\sim Unif(a,b)$.

其实 $$f(x)=\begin{cases}c, & x\in(a,b);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1, \text{即} \int_a^b c\,dx=1$$

$$\Rightarrow c=1/(b-a)$$



性质：均匀分布具有等可能性

即，对于任意的$a<k<k+l<b$，均有

$$P(k<X<k+l)=\int_k^{k+l}\frac{1}{b-a}dt=\frac{l}{b-a}$$ ——与k无关，仅与l有关.

即，服从$U(a,b)$上的均匀分布的随机变量X落入(a,b)中的任意子区间上的概率只与其区间长度有关与区间所处的位置无关.

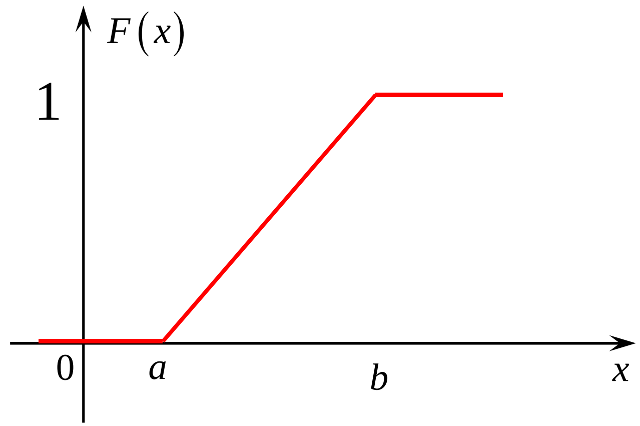
即, X落入(a,b)中的**等长度**的任意子区间上是**等可能**的.

直观理解

若 $X \sim U(a,b)$, 则 $P(a < X < b) = 1.$

且分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b; \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$$



$\because$ 当 $a \le x < b$ 时, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$

例1： 在区间$(-1,2)$上随机取一数X，求：(1) 试写出X的概率密度函数；(2) 该数在$(-0.5,1)$中的概率；(3) 该数为正数的概率.

解： (1) X应在区间$(-1,2)$服从均匀分布，故X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/3, & x\in(-1,2);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$(-0.5,1)$的长度

(2) $$P(-0.5<X<1)=\int_{-0.5}^{1}f(x)dx=\int_{-0.5}^{1}\frac{1}{3}dx=\frac{1-(-0.5)}{3}=\frac{1}{2}.$$

$(-1,2)$的长度

$(0,+\infty)\cap(-1,2)=(0,2)$的长度

(3) $$P(X>0)=\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{3}dx=\frac{2-0}{3}=\frac{2}{3}.$$

$(-1,2)$的长度

均匀分布的概率计算

若 $X \sim U(a,b)$, 则 对于$\forall I \subset R$, 有

法一： $P(X \in I) = \int_I f(x)dx$

法二： $P(X \in I) = \dfrac{I \cap (a,b) \text{ 的长度}}{(a,b) \text{ 的长度}}$

指数分布的定义:

若X的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0\,, & x\le 0,\end{cases}$

其中$\lambda>0$,就称X服从参数为λ的指数分布($Exponential$),

记为$X\sim E(\lambda)$ 或 $X\sim Exp(\lambda)$.

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

性质：指数分布具有无记忆性

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

对于 $t_0>0, t>0,$

$$P(X>t_0+t \mid X>t_0)=\frac{P(X>t_0+t, X>t_0)}{P(X>t_0)}$$

$$=\frac{P(X>t_0+t)}{P(X>t_0)}=\frac{1-F(t_0+t)}{1-F(t_0)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda(t_0+t)}}{e^{-\lambda t_0}}=e^{-\lambda t}=P(X>t).$$

例2： 设某人电话通话时间X（分钟）服从指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

求：(1) 她的通话时间在10～20分钟之间的概率;

(2) 若她已打了10分钟，求她继续通话超过15分钟的概率.

（即，若她已打了10分钟，求她总共通话超过25分钟的概率.）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{15}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

解: (1) $P(10<X<20)=\int_{10}^{20}f(x)dx$

$$=\frac{1}{15}\int_{10}^{20}e^{-\frac{x}{15}}dx=e^{-\frac{2}{3}}-e^{-\frac{4}{3}}.$$

或利用分布函数,

$$P(10<X<20)=F(20)-F(10)$$

$$=1-e^{-\frac{20}{15}}-(1-e^{-\frac{10}{15}})=e^{-\frac{2}{3}}-e^{-\frac{4}{3}}$$

(2) 若她已打了10分钟，求她继续通话超过15分钟的概率.

(2) 根据无记忆性,

$$P(X>25|X>10)=P(X>15)=\int_{15}^{\infty}\frac{1}{15}e^{-\frac{x}{15}}dx=e^{-1}.$$

例3： 设一地段相邻两次交通事故的间隔时间(小时)X服从参数为$2/13$的指数分布. 求:已知在已过去的13小时中没有发生交通事故,那么在未来的2小时内不发生交通事故的概率.

解: 已知$X \sim E(\lambda)$, $\lambda = 2/13$.

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$P(X>15 \mid X>13) = P(X>2)$$

$$=1-F(2) = e^{-\frac{2}{13}\cdot 2} = e^{-\frac{4}{13}}.$$

指数分布的用途:

- 指数分布可以用来表示独立随机事件发生的时间间隔，比如旅客进机场的时间间隔、中文维基百科新条目出现的时间间隔等等;
- 在排队论中，一个顾客接受服务的时间长短也可用指数分布来近似;
- 无记忆性的现象(连续时).