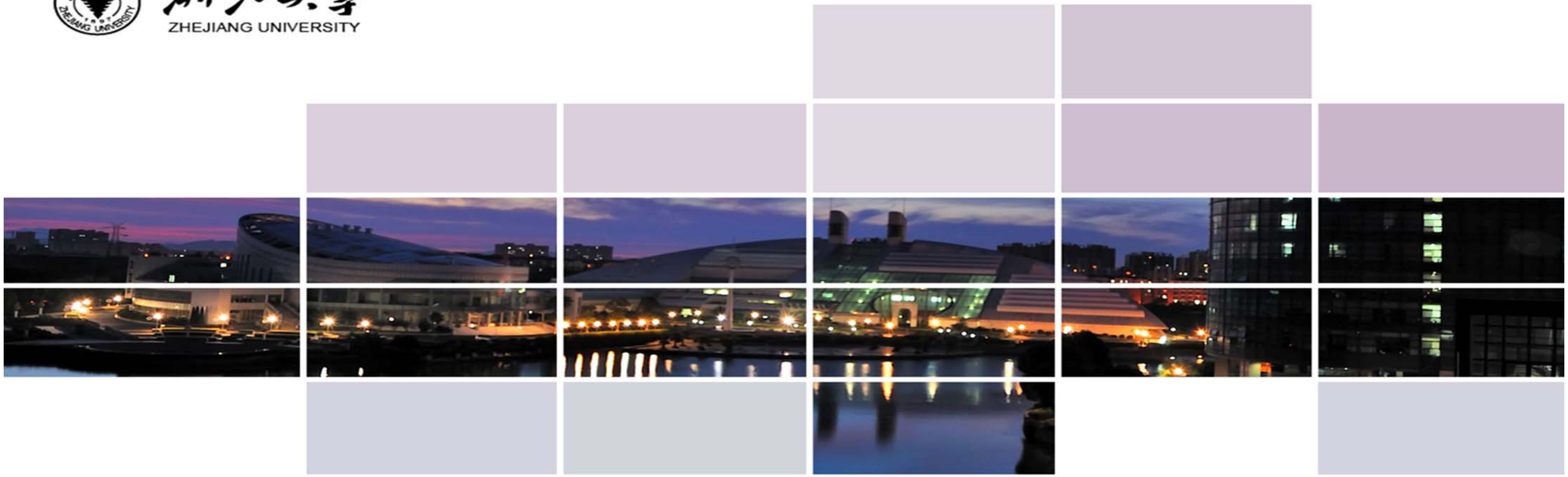
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第12讲 连续型随机变量及其概率密度

定义: 对于随机变量X的分布函数 $F(x)$, 若存在非负的函数 $f(x)$, 使对于任意实数 x 有:

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

则称X为**连续型随机变量**,其中$f(x)$称为X的**概率密度函数**, 简称概率密度.

有时也写为 $f_X(x)$

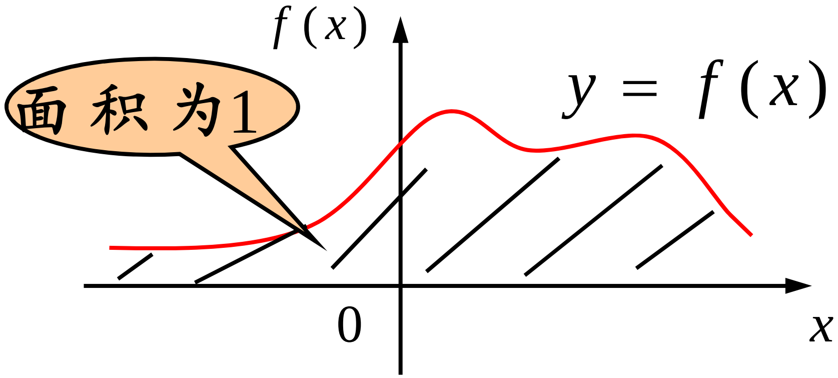
$f(x)$的性质：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

(1) $f(x) \geq 0;$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$

$\because F(+\infty)=1$



$f(x)$的性质：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

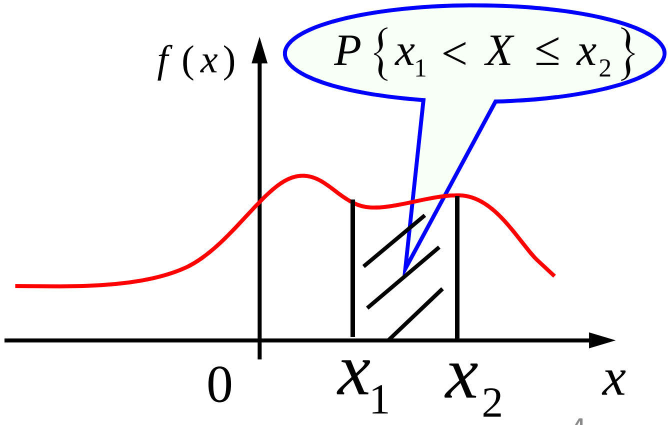
(3) 对于任意的实数x_1，x_2 $(x_1<x_2)$

$$P(x_1<X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt;$$

$$\because LHS=P(X\le x_2)-P(X\le x_1)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{-\infty}^{x_2} f(t)dt-\int_{-\infty}^{x_1} f(t)dt$$

$\Rightarrow$对任意的实数a, $P(X=a)=0$.

且 $P(x_1<X\le x_2)=P(x_1<X<x_2)$



对于连续型的随机变量X,有

$$P(X\in D)=\int_D f(x)dx,\ \text{任意}D\subset R.$$

$f(x)$的性质：

(4) 在$f(x)$连续点x, $F'(x)=f(x)$.

即在$f(x)$的连续点,

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$P(x<X\le x+\Delta x)\approx f(x)\cdot\Delta x$$

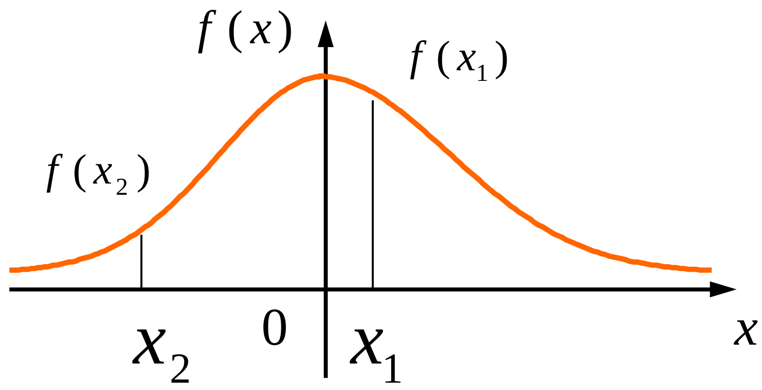
这表示X落在点x附近$(x,\ x+\Delta x]$的概率近似等于$f(x)\Delta x$.

说明：

(1) $f(x)$值的含义；

当Δx充分小时，

$$P(x < X \leq x + \Delta x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$



$f(x_2) < f(x_1)$

(2) $f(x)$的值是可以大于1的；

(3) $$f(x) \underset{\frac{d}{dx}F(x)}{\overset{\int_{-\infty}^{x} f(t)dt}{\rightleftarrows}} F(x).$$

例1： 设X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} cx+1/6, & 0<x<2; \\ 0, & 其他. \end{cases}$

求：(1)常数c的值；(2) X的概率分布函数$F(x)$；(3) $P(-1<X<1)$的值.

解： (1) $\underline{1}=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f(x)dx$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}(cx+\frac{1}{6})dx+\int_{2}^{+\infty} 0dx=\underline{\int_{0}^{2}(cx+\frac{1}{6})dx}=(\frac{c}{2}x^2+\frac{1}{6}x)\Big|_0^2$$

$$=\frac{c}{2}\times 2^2+\frac{1}{6}\times 2 \quad \Rightarrow c=\frac{1}{3}.$$

$$P\{X\in(0,2)\}=1$$

$\{x: f(x)>0\}$

即为X的取值范围.

(支撑)

$$f(x)=\begin{cases} x/3+1/6, & 0<x<2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

注意到$P\{X\in(0,2)\}=1$

1° 当 $x<0$ 时, $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

2° 当 $x\ge 2$ 时, $(0,2)\subset(-\infty,x]$, 故 $F(x)=P\{X\le x\}=1$;

3° 当 $0\le x<2$ 时, $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}\left(\frac{t}{3}+\frac{1}{6}\right)dt=\left(\frac{t^2}{6}+\frac{t}{6}\right)\Big|_0^x=\frac{x^2}{6}+\frac{x}{6}.$$

即 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x}{6}, & 0\le x<2; \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} x/3+1/6, & 0<x<2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(3) $P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1} f(x)dx$

$$=\int_{-1}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0} 0dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{6}\right)dx=0+\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

或 $P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)$

$$=\frac{1^2}{6}+\frac{1}{6}-0=\frac{1}{3}.$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{x^2}{6}+\frac{x}{6}, & 0\le x<2; \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$$

例3： 在第11讲的例3中，得到X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x/3, & 0\le x<3;\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$

求 X的概率密度函数 $f\left(x\right)$.

解： 由于 $f(x)=F'(x)$,

故X的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0<x<3;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$