



浙江大学  
ZHEJIANG UNIVERSITY



# 第11讲 分布函数



**定义:** 随机变量 $X$ , 对任意实数 $x$ , 称函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

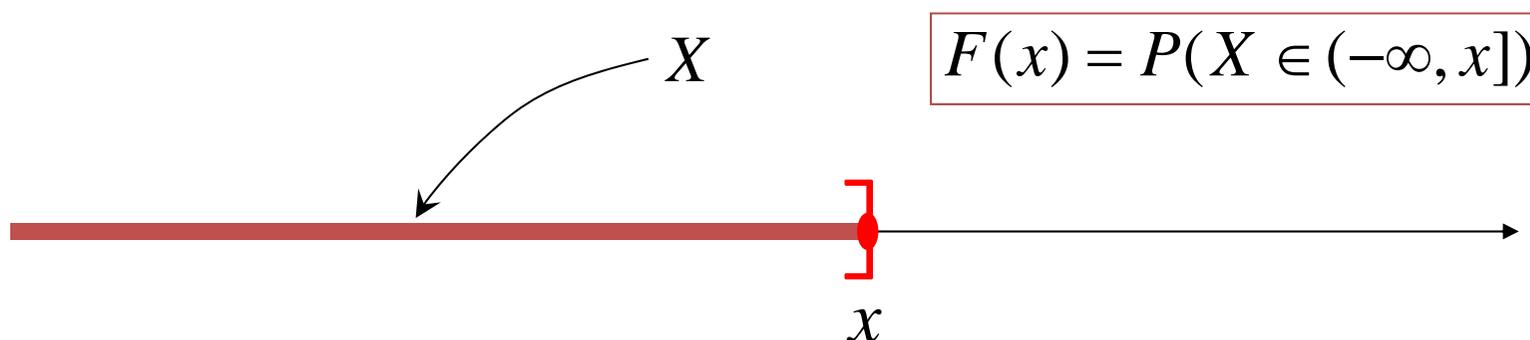
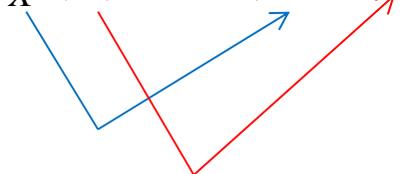
为 $X$ 的概率分布函数, 简称**分布函数**.

**说明:**

- 任何随机变量都有相应的分布函数
- $F(x)$ 的几何意义

有时也写为

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$





## 分布函数的用途:

可以给出随机变量落入任意一个范围的可能性

$X$ 的分布函数为 $F(x)$ ,  $a, b$ 为两个实数,  $a < b$ , 则

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a);$$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b - 0) = F(b - 0) - F(a);$$

$$P(X = b) = P(X \leq b) - P(X < b) = F(b) - F(b - 0).$$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) - P(X = b)$$


$$P(a \leq X \leq b)$$

$$P(a \leq X < b)$$



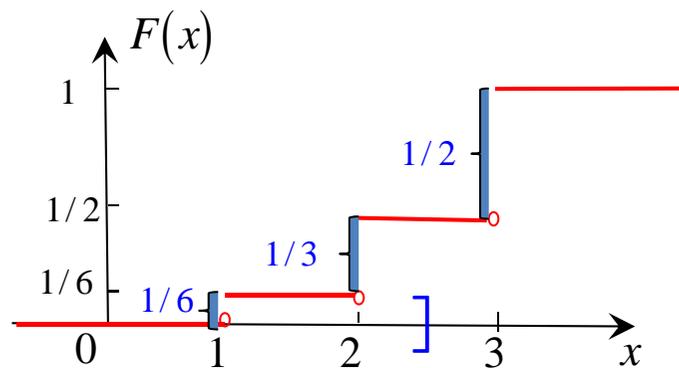
**例1:** 一罐子中有6个大小形状一致的球, 球号分别为1, 2, 2, 3, 3, 3. 现随机摸一球(假设摸到各球的可能性相同), 用 $X$ 表示摸到的球的球号. 求 $X$ 的分布函数.

**解:** 由题意知,  $X$ 的分布律为

$X$	1	2	3
$P$	1/6	1/3	1/2

那么 $X$ 的分布函数为

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1/6, & 1 \leq x < 2; \\ 1/2, & 2 \leq x < 3; \\ 1, & x \geq 3; \end{cases}$$





一般地，离散型随机变量的分布函数为阶梯函数。

设离散型随机变量 $X$ 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$

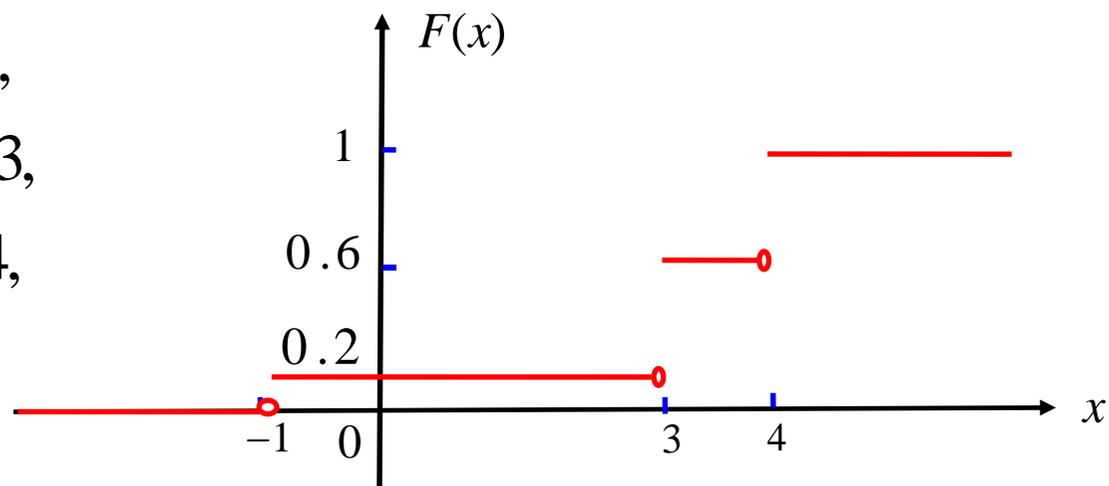
$X$ 的分布函数为 $F(x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$ .

$F(x)$ 在 $x = x_k, (k = 1, 2, \dots)$ 处有跳跃，其跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$ .



例2: 设随机变量 $X$  的分布函数如下, 求 $X$ 的分布律.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.2, & -1 \leq x < 3, \\ 0.6, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$



解:  $F(x)$ 只在 $-1, 3, 4$ 有跳, 跳的幅度分别是 $0.2, 0.4, 0.4$ .

故分布律为

$X$	$-1$	$3$	$4$
$P$	$0.2$	$0.4$	$0.4$



## $F(x)$ 的性质:

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1$ ;

(2)  $F(x)$ 单调不减;

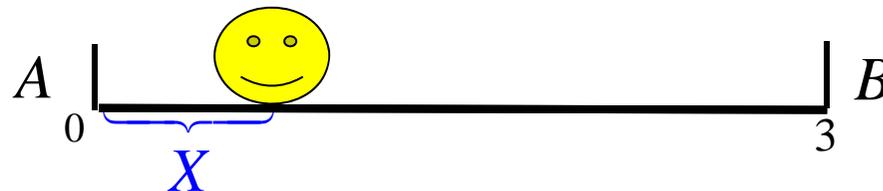
$\therefore$  对于任意  $x_1 < x_2$ , 有  $0 \leq P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ .

(3)  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$ ;

(4)  $F(x)$ 是右连续函数, 即  $F(x+0) = F(x)$ .



**例3:** 设一醉汉游离于A, B两点间, A, B之间距离3个单位. 该醉汉落在A, B间任一子区间的概率与区间长度成正比. 设他在离A点距离X远处, 求X的分布函数.



**解:** 根据题意,  $P(0 \leq X \leq 3) = 1$ ,

故当  $x < 0$  时,  $F(x) = P(X \leq x) = 0$ ; 当  $x \geq 3$  时,  $F(x) = 1$ .

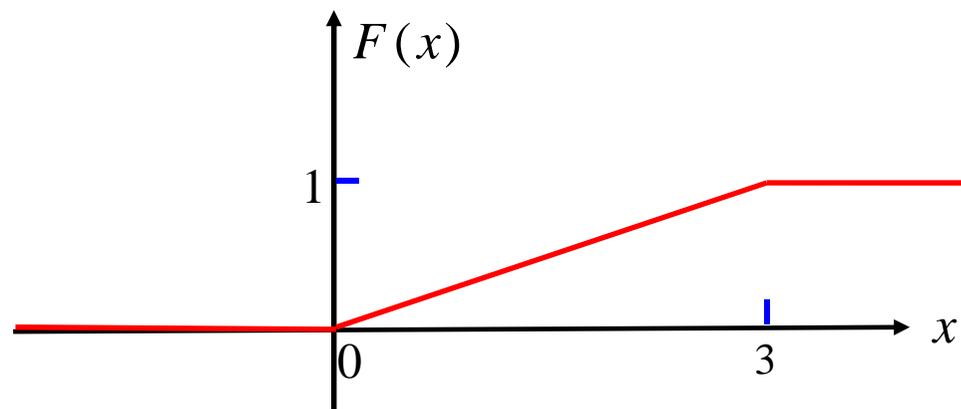
设比例系数为  $k$ , 则  $P(0 \leq X \leq 3) = 3k = 1, \Rightarrow k = 1/3$ .

而当  $0 \leq x < 3$  时,  $F(x) = P(X \leq x) = P(X < 0) + P(0 \leq X \leq x) = 0 + \frac{1}{3} \cdot x$ .

从而X的分布函数为: 
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x/3, & 0 \leq x < 3; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x/3, & 0 \leq x < 3; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$



从图可见：此分布函数是个连续函数，因此 $X$ 不是离散型随机变量。

$X$ 是连续型随机变量。