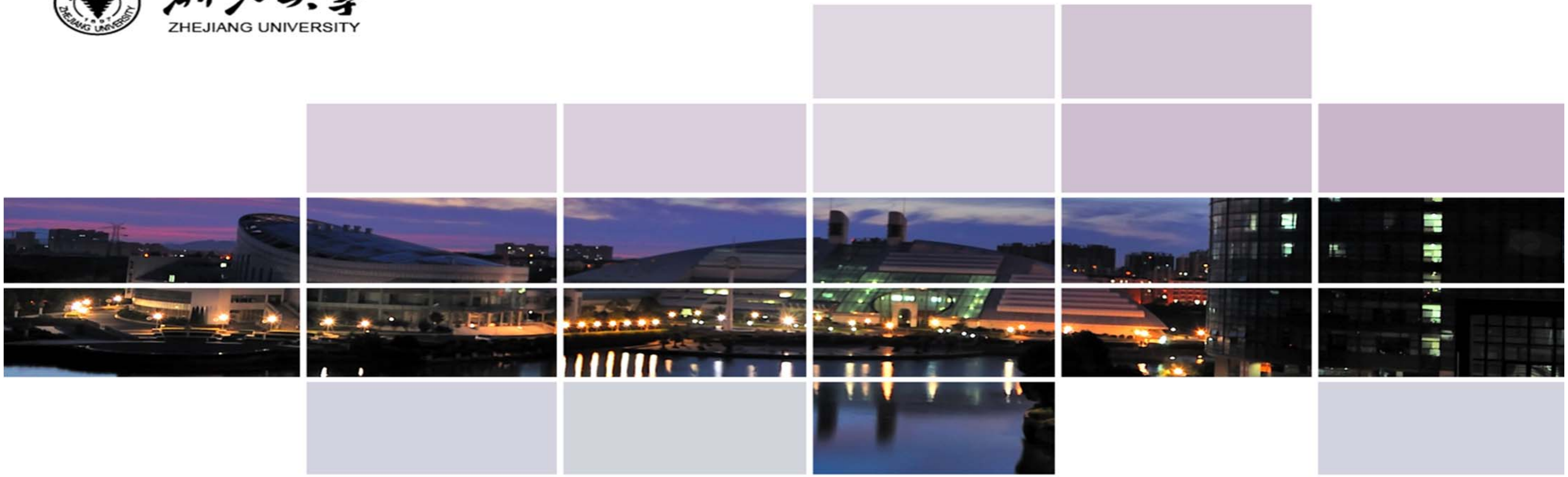
浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY



第10讲 离散型随机变量

0—1分布的定义:

若X的概率分布律为

X	0	1
P	$1-p$	p

随机变量
只可能取0,
1 两个值

其中 $0<p<1$, 就称X服从参数为p的 0−1分布(或两点分布),

记为 $X\sim 0-1(p)$或 $X\sim B(1,p)$.

其分布律还可以写为 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1.$

(X服从退化分布: 若 $P(X=c)=1$.)

0—1分布的应用:

对于一个随机试验, 若它的样本空间只包含两个元素, 即$S=\{e_1,e_2\}$, 我们总能在S上定义一个服从(0—1)分布的随机变量

$$X=\begin{cases}0, & 当e=e_1;\\ 1, & 当e=e_2,\end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果.

0—1分布的应用：

一个随机试验,设A是一随机事件, 且$P(A)=p\ (0<p<1)$. 若仅考虑事件A发生与否, 就可以定义一个服从参数为p的0−1分布的随机变量:

$$X=\begin{cases}1, & 若A发生;\\ 0, & 若A不发生(即\overline{A}发生),\end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果.

只有两个可能结果的试验, 称为贝努利(Bernoulli)试验, 故两点分布有时也称为贝努利分布.

例1： 投掷一颗均匀的骰子，考察6点是否出现，用Y表示该实验结果，求Y的概率分布律.

解： 由题意知，令

$$Y=\begin{cases}1, & \text{抛出的点数为 }6;\\ 0, & \text{抛出的点数不为 }6.\end{cases}$$

则Y的分布律为

Y	0	1
P	5/6	1/6

或写为 $P(X=k)=(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{1-k}$，$k=0,1$. 即 $Y\sim 0-1(\frac{1}{6})$.

事实上Y也可以看做是掷一次骰子，点数为6的次数.

如：

- 检查产品的质量是否合格
- 对新生婴儿的性别进行登记
- 检验种子是否发芽
- 考试是否通过
- 求婚是否成功
- 马路乱停车是否会受罚

考察:

马路乱停车9次, 若每次不被罚的概率为0.4,求9次中有2次不被罚的概率.

$C_9^2\, 0.4^2 \times 0.6^7$ (假定每次是否被罚相互独立)

某人注册了6门MOOC课程, 若已知每门课的通过率为80%,假设每门课之间是独立的, 求他通过5门的概率. $C_6^1 0.8^5 \times 0.2$

设试验E只有两个可能的结果：A或$\overline{A}$，且$P(A)=p, 0<p<1$.将E独立地重复地进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重贝努利试验.

想了解: n重贝努利试验中结果A发生的次数的统计规律.

设X表示n重贝努利试验中结果A发生的次数, 则X的可能取值为$0,1,\cdots,n$,

且 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

二项分布的定义:

若X的概率分布律为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n,$$

其中$n\geq 1,\ 0<p<1$, 就称X服从参数为n,p的二项分布 (Binomial),

记为 $X\sim B(n,p)$.

可以证明: $1=(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$, 其中$q=1-p$.

例2：马路上独立地乱停车9次，若每次不被罚的概率为0.4.

用X表示9次乱停车未被罚的次数，则 $X \sim B(9, 0.4)$;

用Y表示9次乱停车被罚的次数，则 $Y \sim B(9, 0.6)$.

泊松分布的定义:

若X的概率分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$, 就称X服从参数为λ的泊松分布(*Poisson*),

记为 $X\sim\pi(\lambda)$ 或 $X\sim P(\lambda)$.

根据泰勒展开式可得: $e^{\lambda}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$

泊松分布的用途:

- 某人一天内收到的微信的数量
- 来到某公共汽车站的乘客
- 某放射性物质发射出的粒子
- 显微镜下某区域中的白血球

如果某事件以固定强度λ,随机且独立地出现，该事件在单位时间内出现的次数（个数）可以看成是服从泊松分布.

二项分布与泊松分布有以下近似公式:

当$n>10, p<0.1$时,

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\text{ 其中 }\lambda = np.$$

- 二项分布,泊松分布的概率计算见实验4;
- 二项分布,泊松分布的近似效果见实验5.

即当$n>10, p<0.1$时,二项分布$B(n, p)$可以用泊松分布$\pi(np)$来近似.

例3： 某地区一个月内每200个成年人中有1个会患上某种疾病，设各人是否患病相互独立. 若该地区一社区有1000个成年人,求某月内该社区至少有3人患病的概率.

解: 设该社区1000人中有X个人患病, 则$X \sim B(1000, p)$, 其中 $p = 1/200$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - \left(\frac{199}{200}\right)^{1000} - C_{1000}^{1}\left(\frac{1}{200}\right)^{1}\left(\frac{199}{200}\right)^{999} - C_{1000}^{2}\left(\frac{1}{200}\right)^{2}\left(\frac{199}{200}\right)^{998} = \underline{0.8760.}$$

利用泊松分布进行近似计算, 取$\lambda = 1000 \times \dfrac{1}{200} = 5$,

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$\approx 1 - \frac{e^{-5}}{0!} - \frac{5e^{-5}}{1!} - \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = \underline{0.8753.}$$

$$\boxed{P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n,}$$

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k = 0, 1, 2, \cdots,}$$

几何分布的定义:

若X的概率分布律为

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,3,\cdots,$$

其中 $0<p<1$, 称X服从参数为p的几何分布(*Geometric*),

记为 $X \sim Geom(p)$.

几何分布的用途:

在重复多次的贝努里试验中, 试验进行到某种结果出现第一次为止, 此时的试验总次数服从几何分布. 如: 射击,首次击中目标时射击的次数; 第9讲的例2.