线性变换的矩阵表示式

1. 线性变换在给定基下的矩阵

设线性空间V_n的一组基为$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，T为V_n的线性变换，则$T(\alpha_i)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)p_i$；

故：$T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n))=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$

称A为T在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的矩阵.

注：

(1) 矩阵A是否惟一？

矩阵 A 由基的像 $T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n)$ 惟一确定.

(2) 矩阵A是否可逆？ 矩阵 A 不一定可逆.

(3) 线性变换T与矩阵A之间是否一一对应？

如果给出一个矩阵 A 作为线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵，能否惟一地确定这个线性变换 T？

$$\forall \alpha \in V_n, \quad 记\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i ,$$

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(\alpha_i) = \big(T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n)\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

即 $$T\left[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right]=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

这个关系式惟一地确定了一个变换T，

$T(\alpha)$的坐标

且变换T是以A为矩阵的线性变换.

$T \leftrightarrow A$一一对应.

例　在 $P[x]_3$ 中，取基 $p_1=x^3, p_2=x^2, p_3=x, p_4=1$，

求微分运算 D 的矩阵.

解

$$\begin{cases} \mathrm{D}p_1=3x^2=0p_1+3p_2+0p_3+0p_4 \\ \mathrm{D}p_2=2x=0p_1+0p_2+2p_3+0p_4 \\ \mathrm{D}p_3=1=0p_1+0p_2+0p_3+1p_4 \\ \mathrm{D}p_4=0=0p_1+0p_2+0p_3+0p_4 \end{cases}$$

D 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 在 R^3 中,T 表示将向量投影到 xoy 平面的线性变换,

即 $T(xi+yj+zk)=xi+yj$.

(1) 取基为 i,j,k,求 T 的矩阵;

(2) 取基为 $\alpha=i,\beta=j,\gamma=i+j+k$,求 T 的矩阵.

解

(1) $\begin{cases} Ti=i, \\ Tj=j, \\ Tk=0, \end{cases}$ 即 $T(i,j,k)=(i,j,k)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$T(xi+yj+zk)=xi+yj.$$

基为 $\alpha=i,\beta=j,\gamma=i+j+k$.

(2) $\begin{cases} T\alpha=i=\alpha, \\ T\beta=j=\beta, \\ T\gamma=i+j=\alpha+\beta, \end{cases}$

即 $T(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 同一线性变换在不同基下的矩阵的关系

定理：设线性空间V_n取定两个基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\cdots,\beta_n$，且两个基有变换公式$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，$V_n$中的线性变换$T$在这两个基下的矩阵分别是$A$与$B$，则

$$B=P^{-1}AP.$$

证

$$\left.\begin{aligned} T(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)&=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A \\ T(\beta_1,\cdots,\beta_n)&=(\beta_1,\cdots,\beta_n)B \\ (\beta_1,\cdots,\beta_n)&=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} T(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)PB \\ T(\beta_1,\cdots,\beta_n)=T((\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)AP \end{cases}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关 $\Rightarrow PB=AP \Rightarrow B=P^{-1}AP$

P 可逆

例 设V_2中的线性变换T在基α_1,α_2下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

求T在基α_2,α_1下的矩阵.

解

$$(\alpha_2,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 即\ P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

求得 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，于是 T 在基 α_2,α_1 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{22}&a_{21}\\a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}.$$

定义 线性变换T的像空间$T(V_n)$的维数，称为线性变换T的秩.

若A是T的矩阵，则T的秩就是$R(A)$.

若T的秩为r，则T的核N_T的维数为$n-r$.

谢 谢