线性变换

一、线性变换的定义

线性变换T：$V_n \to U_m$

满足 (1).$\forall \alpha, \beta \in V_n$，$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$

(2).$\forall \alpha \in V_n, k \in R$，$T(k\alpha)=kT(\alpha)$

注： (1). 即保持线性组合的映射

(2). T：$V_n \to V_n$ 即V_n中的线性变换

(3). 恒等映射，　　　零映射

T：$V_n \to V_n$　　　T：$V_n \to V_n$

$\alpha \to \alpha$　　　$\alpha \to \Theta$

二、线性变换的例子

例 在线性空间 $P[x]_3$ 中，

任取 $p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P[x]_3$,

$$q = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \in P[x]_3,$$

(1) 微分运算 D 是一个线性变换.

$$\mathrm{D}p = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1; \quad \mathrm{D}q = 3b_3x^2 + 2b_2x + b_1,$$

$$\mathrm{D}(p+q)=\mathrm{D}\left[\left(a_3+b_3\right)x^3+\left(a_2+b_2\right)x^2+\left(a_1+b_1\right)x+\left(a_0+b_0\right)\right]$$

$$=3\left(a_3+b_3\right)x^2+2\left(a_2+b_2\right)x+\left(a_1+b_1\right)$$

$$=\left(3a_3x^2+2a_2x+a_1\right)+\left(3b_3x^2+2b_2x+b_1\right)$$

$$=\mathrm{D}p+\mathrm{D}q\ ;$$

$$\mathrm{D}(\lambda p)=\mathrm{D}\left[\lambda a_3x^3+\lambda a_2x^2+\lambda a_1x+\lambda a_0\right]$$

$$=\lambda\left(3a_3x^2+2a_2x+a_1\right)=\lambda\mathrm{D}p\ .$$

(2) 如果$T(P)=a_0$，那么T也是一个线性变换.

这是因为

$$T(p+q)=a_0+b_0=T(p)+T(q);$$

$$T(\lambda p)=\lambda a_0=\lambda T(p).$$

$$p=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in P[x]_3,$$

$$q=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\in P[x]_3,$$

(3) 如果 $T_1(P)=1$, 则 T_1 是一个变换,

但不是线性变换.

这是因为 $T_1(p+q)=1$，但 $T_1(p)+T_1(q)=1+1=2$,

所以 $T_1(p+q)\neq T_1(p)+T_1(q)$.

$$p=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in P[x]_3,$$

$$q=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0\in P[x]_3,$$

三、线性变换的基本性质

(i) $T\Theta=\Theta,\ T(-\alpha)=-T(\alpha)$;

(ii) 若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$,

则 $T\beta=k_1T\alpha_1+k_2T\alpha_2+\cdots+k_mT\alpha_m$.

注：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,

$T\alpha_1,T\alpha_2,\cdots,T\alpha_m$ 不一定线性无关.

(iv) 线性变换T的像集$T(V_n)$是一个线性空间，称为线性变换T的**像空间**.

证 设$\beta_1,\beta_2\in T(V_n)$，则有$\alpha_1,\alpha_2\in V_n$，使$T\alpha_1=\beta_1$，$T\alpha_2=\beta_2$，从而

$$\beta_1+\beta_2=T\alpha_1+T\alpha_2=T(\alpha_1+\alpha_2)\in T(V_n)\ (因\ \alpha_1+\alpha_2\in V_n),$$

$$\lambda\beta_1=\lambda T\alpha_1=T(\lambda\alpha_1)\in T(V_n)\ (因\ \lambda\alpha_1\in V_n),$$

可见$T(V_n)$对V_n中的线性运算封闭，故它是一个线性空间.

(v) 使 $T\alpha=\Theta$ 的 α 的全体 $N_T=\{\alpha \mid \alpha\in V_n, T\alpha=\Theta\}$

也是一个线性空间，称为线性变换 T 的核.

证 $N_T\subseteq V_n$，且若 $\alpha_1,\alpha_2\in N_T$，即 $T\alpha_1=\Theta$, $T\alpha_2=\Theta$，

则 $T(\alpha_1+\alpha_2)=T\alpha_1+T\alpha_2=\Theta$，所以 $\alpha_1+\alpha_2\in N_T$；

若 $\alpha_1\in N_T$, $\lambda\in R$，则 $T(\lambda\alpha_1)=\lambda T\alpha_1=\lambda\Theta=\Theta$，

所以 $\lambda\alpha_1\in N_T$，可见 N_T 对 V_n 中的线性运算封闭，

故它是一个线性空间.

例 设有 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\ \alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix},$$

定义 R^n 中的变换 $y=T(x)$ 为 $T: R^n \to R^n$

$$x \to y=T(x)=Ax$$

则 T 是线性变换.

这是因为　设 $a, b \in R^n$，

则 $T(a+b) = A(a+b) = Aa + Ab = T(a) + T(b)$，

$T(\lambda a) = A(\lambda a) = \lambda Aa = \lambda T(a)$.

T 的像空间就是

$$T\left(R^n\right) = \left\{ y = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \,\middle|\, x_1, x_2, \cdots, x_n \in R \right\},$$

T 的核 N_T 就是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间.

谢　谢