基变换与坐标变换

1. 基变换公式

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是线性空间 V_n 中的两个基，

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n, \end{cases} \Leftrightarrow (\beta_1,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$$

$P = (p_{ij})$，可逆阵

基变换公式

P称为由基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$到基$\beta_1,\cdots,\beta_n$的过渡矩阵.

2. 坐标变换公式

定理 设$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$，

又$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}，\quad 或 \quad \begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

证 $$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix},$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，因此有坐标变换公式.

例 在 $P[x]_3$ 中取两个基

$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x,$ $\beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1,$

$\alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1,$ $\beta_2 = x^2 + 2x + 2,$

$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1,$ $\beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2,$

$\alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1,$ $\beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2.$

求坐标变换公式.

解　将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 表示.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(x^3,x^2,x,1)A,$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(x^3,x^2,x,1)B,$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix},$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B,$$

故坐标变换公式为 $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = B^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

用矩阵的初等行变换求 $B^{-1}A$.

$$(B,A)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

于是坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

谢 谢