维数、基与坐标

定义：设有线性空间 V，如果存在n个向量$a_1, a_2, \ldots, a_n$满足

(i) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性无关；

(ii) V 中任意一个向量都能由 $a_1, a_2, \ldots, a_n$线性表示；

那么称向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_n$是线性空间 V 的一个**基**，

n称为线性空间 V 的**维数**，

只含一个零向量的线性空间没有基，规定它的维数为 0.

维数为 n 的线性空间称为 **n 维线性空间**，记作 V_n.

例如，线性空间

$$V=\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in R\},$$

$$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是 V 的一个基，

V 的维数是 n-1.

对于 n 维线性空间 V_n，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V_n 的一个基，

则 V_n 可表示为

$$V_n=\left\{\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n \,\middle|\, x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\right\},$$

即 V_n 是基所生成的线性空间.

若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$V_n$的一个基，$\forall \alpha \in V_n$，存在惟一的一组

有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$.

反之，任给一组有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，总有惟一的向量

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n \in V_n.$$

定义 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V_n$的一个基. $\forall\alpha\in V_n$,

总有且仅有一组有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$这组有序数就称为向量α在这个基中的坐标,

并记作$\alpha=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$.

例 在线性空间 $P[x]_4$ 中,

$$p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3, p_5 = x^4$$

就是它的一个基. 任一不超过 4 次的多项式

$$p = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

都可表示为 $p = a_0 p_1 + a_1 p_2 + a_2 p_3 + a_3 p_4 + a_4 p_5$,

因此 p 在这个基中的坐标为 $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$.

若另取一个基 $q_1=1, q_2=1+x, q_3=2x^2, q_4=x^3, q_5=x^4$,

则 $$p=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

$$=(a_0-a_1)+a_1(1+x)+\frac{a_2}{2}2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

$$=(a_0-a_1)q_1+a_1q_2+\frac{a_2}{2}q_3+a_3q_4+a_4q_5,$$

因此 p 在这个基中的坐标为 $\left(a_0-a_1, a_1, \frac{a_2}{2}, a_3, a_4\right)^T$.

设在 n 维线性空间 V_n 中取定一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，则 $\forall\alpha\in V_n$，

$\alpha\leftrightarrow\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$ 这个一一对应关系满足性质：

设 $\alpha\leftrightarrow\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$，$\beta\leftrightarrow\left(y_1,\cdots,y_n\right)^T$，则

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)}\quad \alpha+\beta\leftrightarrow\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T+\left(y_1,\cdots,y_n\right)^T;\\ \text{(ii)}\quad \lambda\alpha\leftrightarrow\lambda\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T,\end{array}\right\}\text{保持线性组合的对应，}$$

称 V_n 与 R^n 同构，记作 $V_n\cong R^n$.

定义 设 U 与 V 是两个线性空间，如果它们的向量之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，就说线性空间 U 与 V **同构**.

任何 n 维线性空间都与 R^n 同构，即维数相等的线性空间都同构.

线性空间的结构完全被它的维数所决定.

谢　谢