第六章

线性空间与线性变换

线性空间与线性变换

线性空间的基本性质、子空间

一、线性空间的基本性质

1. 零元素是惟一的.

证 设Θ_1，Θ_2是线性空间V中的两个零元素，

即对任何$\alpha \in V$，有$\alpha + \Theta_1 = \alpha$，$\alpha + \Theta_2 = \alpha$.

于是$\Theta_2 + \Theta_1 = \Theta_2$，$\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_1$，

所以$\Theta_1 = \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_2 + \Theta_1 = \Theta_2$.

2. 任一向量的负向量是惟一的，α 的负向量记作 $-\alpha$.

证　设 β ，γ 是 α 的负向量，

即 $\alpha+\beta=\Theta$，$\alpha+\gamma=\Theta$.　于是

$$\beta=\beta+\Theta=\beta+(\alpha+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma=\Theta+\gamma=\gamma .$$

3. $0\alpha = \Theta$， $(-1)\alpha = -\alpha$ ， $\lambda\Theta = \Theta$.

证 $\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = \alpha$，所以 $0\alpha = \Theta$.

$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1+(-1)]\alpha = 0\alpha = \Theta$，

所以 $(-1)\alpha = -\alpha$.

$\lambda\Theta = \lambda[\alpha + (-1)\alpha] = \lambda\alpha + (-\lambda)\alpha = [\lambda + (-\lambda)]\alpha = 0\alpha = \Theta$.

4. 如果 $\lambda\alpha=\Theta$，则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=\Theta$.

证　若 $\lambda\neq 0$，在 $\lambda\alpha=\Theta$ 两边乘 $\dfrac{1}{\lambda}$，

得 $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda\alpha)=\dfrac{1}{\lambda}\Theta=\Theta$，而 $\dfrac{1}{\lambda}(\lambda\alpha)=\left(\dfrac{1}{\lambda}\lambda\right)\alpha=1\alpha=\alpha$，

所以 $\alpha=\Theta$.

二、子空间

1. 子空间的定义

设 V 是一个线性空间，L 是 V 的一个非空子集，如果 L

对于 V 中所定义的加法和数乘两种运算也构成一个线性空间，

则称 L 为 V 的子空间.

2. 子空间的判定

(i) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$； (ii) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(iii) 在 V 中存在零元素 Θ，对任何 $\alpha\in V$，都有 $\alpha+\Theta=\alpha$；

(iv) 对任何 $\alpha\in V$，都有 α 的负元素 $\beta\in V$，使 $\alpha+\beta=\Theta$；

(v) $1\alpha=\alpha$； (vi) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$；

(vii) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$； (viii) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$，

定理

线性空间V的非空子集L构成子空间的充分必要条件是：

L对于V中的线性运算封闭.

例.集合 $V=\{x=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in R\}\subseteq R^n$

对 R^n 中定义的向量的加法与数乘运算封闭,

是 R^n 的子空间.

谢 谢