第六章

线性空间与线性变换

线性空间与线性变换

线性空间的定义与例子

一、线性空间的定义

设 V 是一个集合，R 为实数域. 满足

(1) V 是非空集合；

(2) 对两种运算“加法”、“数乘”封闭；

$\forall \alpha, \beta \in V$，有惟一的 $\gamma = \alpha + \beta \in V$.

$\forall \alpha \in V, \lambda \in R$，有惟一的 $\delta = \lambda\alpha \in V$.

(3) 满足八条运算规律：

则 V 称为(实数域 R 上的)线性空间，

V 中的元素统称为(实)向量.

(i) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；　　(ii) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(iii) 在 V 中存在零元素 Θ，对任何 $\alpha\in V$，都有 $\alpha+\Theta=\alpha$；

(iv) 对任何 $\alpha\in V$，都有 α 的负元素 $\beta\in V$，使 $\alpha+\beta=\Theta$；

(v) $1\alpha=\alpha$；　　(vi) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$；

(vii) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$；　(viii) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$，

说明：

1. 满足八条运算规律的加法与数乘运算，就称为线性运算，

凡定义了线性运算的集合就称为线性空间,元素就称为向量.

2. 向量不一定是有序数组.

3. 线性空间的运算不一定是有序数组的加法及数乘运算.

二、线性空间实例

1. 向量类：(1).全体n维向量R^n在向量的加法与数乘下

(2). 向量空间

(3).齐次线性方程组的解空间

2. 矩阵类：

(1).全体$m\times n$阵在矩阵加法和数乘下

(2).全体n阶方阵

(3).全体n阶对称阵

(4).全体n阶对角阵

3. 多项式类：

次数不超过n的实一元多项式的全体$P[x]_n$，

对于通常的多项式的加法和数乘多项式的乘法.

4. 函数类：

次正弦函数的集合$S[x]$,

对于通常的函数加法和数乘函数的乘法.

例 次数不超过 n 的多项式的全体，记作 $P[x]_n$，即

$$P[x]_n = \{ p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in R \},$$

对于通常的多项式加法、数乘多项式的乘法构成线性空间.

这是因为：通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算

显然满足线性运算规律，只要验证 $P[x]_n$ 对运算封闭：

$$\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right) + \left(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0\right)$$

$$= \left(a_n + b_n\right) x^n + \cdots + \left(a_1 + b_1\right) x + \left(a_0 + b_0\right) \in P[x]_n$$

$$\lambda \left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right)$$

$$= \left(\lambda a_n\right) x^n + \cdots + \left(\lambda a_1\right) x + \left(\lambda a_0\right) \in P[x]_n,$$

所以 $P[x]_n$ 是一个线性空间.

例 正弦函数的集合

$$S[x]=\{s=A\sin(x+B)\mid A,B\in R\},$$

对于通常的函数加法及数乘函数的乘法构成线性空间.

这是因为：通常的函数加法及数乘函数的乘法两种运算显然

满足线性运算规律，故只要验证 $S[x]$对运算封闭：

$$s_1 + s_2 = A_1 \sin(x + B_1) + A_2 \sin(x + B_2)$$

$$= \left(a_1 \cos x + b_1 \sin x\right) + \left(a_2 \cos x + b_2 \sin x\right),$$

$$= \left(a_1 + a_2\right) \cos x + \left(b_1 + b_2\right) \sin x \; = A \sin(x + B) \in \mathrm{S}\left[x\right],$$

$$\lambda s_1 = \lambda A_1 \sin(x + B_1) = \left(\lambda A_1\right) \sin(x + B_1) \in S\left[x\right],$$

所以 $S[x]$ 是一个线性空间.

注意

验证一个集合是否构成线性空间,

当然不能只检验对运算的封闭性.

若所定义的加法和数乘运算不是通常的实数的加、乘运算,

就应仔细检验是否满足八条运算规律.

例 n 个有序实数组成的数组的全体

$$S^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \middle| x_1, x_2, \cdots, x_n \in R \right\} \underset{\text{集合}}{=} R^n$$

对于通常的有序数组的加法及如下定义的乘法

$$\lambda \circ \left(x_1, x_2, \cdots, x_n \right)^T = \left(0, 0, \cdots, 0 \right)^T$$

不构成向量空间. 虽然 S^n 对运算封闭，但 $1 \circ x = 0$，

不满足运算规律(v)，即所定义的运算不是线性运算.

线性空间的概念是集合与运算二者的结合.

同一个集合，若定义两种不同的线性运算，

就构成不同的线性空间；若定义的运算不是线性运算，

就不能构成线性空间.

例 正实数的全体，记作 R^+，在其中定义加法及数乘运算为

$$a \oplus b = ab \ \ (a, b \in R^+), \ \lambda \circ a = a^{\lambda} \ (\lambda \in R, a \in R^+),$$

验证 R^+ 对上述加法与数乘运算构成线性空间.

证 对加法封闭：对任意的 $a, b \in R^+$，有 $a \oplus b = ab \in R^+$；

对数乘封闭：对任意的 $\lambda \in R$, $a \in R^+$，有 $\lambda \circ a = a^{\lambda} \in R^+$.

(i) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$;

(ii) $\left(a \oplus b\right) \oplus c = \left(ab\right) \oplus c = \left(ab\right)c = a\left(bc\right) = a \oplus \left(b \oplus c\right)$;

(iii) 在 R^+ 中存在零元素 1， $\forall a \in R^+$， 都有 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$;

(iv) $\forall a \in R^+$， 都有负元素 $a^{-1} \in R^+$， 使 $a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1$;

(v) $1 \circ a = a^1 = a$;

(vi) $\lambda \circ (\mu \circ \alpha) = \lambda \circ a^{\mu} = (a^{\mu})^{\lambda} = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a$

(vii) $(\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda+\mu} = a^{\lambda} a^{\mu} = a^{\lambda} \oplus a^{\mu} = \lambda \circ a \oplus \mu \circ a$

(viii) $\lambda \circ (a \oplus b) = \lambda \circ (ab) = (ab)^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda} = a^{\lambda} \oplus b^{\lambda}$

$$= \lambda \circ a \oplus \lambda \circ b,$$

因此，R^{+}对于所定义的运算构成线性空间.

谢 谢