相似矩阵及二次型

正定二次型

一. 定理(惯性定理)

设二次型$f = x^T Ax$的秩为r,有两个可逆变换

$$x = Cy \qquad 及 \qquad x = Pz$$

使 $$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 \qquad (k_i \neq 0),$$

及 $$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 \qquad (\lambda_i \neq 0),$$

则$k_1, k_2, \cdots, k_r$中正数的个数与$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$中正数的个数相等.

二次型的标准形中，

正系数的个数称为二次型的正惯性指数，

负系数的个数称为二次型的负惯性指数.

若二次型 f 的正惯性指数为 p，秩为 r，

则 f 的规范形便可确定为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2 .$$

二．定义

设二次型 $f(x)=x^T Ax$，如果对任何 $x\neq 0$ 都有 $f(x)>0$（显然 $f(0)=0$），则称 f 为正定二次型，并称对称阵 A 是正定的；如果对任何 $x\neq 0$ 都有 $f(x)<0$，则称 f 为负定二次型，并称对称阵 A 是负定的．

三. 定理 2

n 元二次型 $f(x)=x^T Ax$ 为正定的充分必要条件是：

它的标准形的 n 个系数全为正，即它的规范形的

n 个系数全为 1，亦即它的正惯性指数等于 n.

证 设可逆变换 $x=Cy$ 使 $f(x)=f(Cy)=\sum_{i=1}^{n} k_i y_i^2$.

充分性：设 $k_i>0(i=1,\cdots,n)$. 任给 $x\neq 0$，则 $y=C^{-1}x\neq 0$,

故 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}k_i y_i^2>0$.

必要性：用反证法. 假设有 $k_s\le 0$，则当 $y=e_s$ 时，

$f(Ce_s)=k_s\le 0$. 显然 $Ce_s\ne 0$，这与 f 为正定相矛盾.

这就证明了 $k_i>0(i=1,\cdots,n)$.

推论　对称矩阵 A 为正定的充分必要条件是：A 的特征值全为正.

四．定理3

对称矩阵为正定的充分必要条件是：矩阵的各阶顺序主子式为正，即

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0;$$

对称矩阵为负定的充分必要条件是：其奇数阶顺序主子式为负，而偶数阶顺序主子式为正，即

$$(-1)^r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad (r = 1, 2, \cdots, n).$$

这个定理称为霍尔维茨定理.

例 判定二次型 $f = -5x^2 - 6y^2 - 4z^2 + 4xy + 4xz$ 的正定性.

解 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

其中 $a_{11} = -5 < 0$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 26 > 0$$

$$|A| = -80 < 0,$$

所以 f 是负定的.

总结：

二次型$f = x^T Ax$正定的充分必要条件是：

(1)$\forall x \neq 0, x^T Ax > 0$

(2)A的全体特征值均为正

(3) f的标准形为$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, 其中$\forall \lambda_i > 0$

(4) f的规范形为$z_1{}^2 + \cdots + z_n{}^2$

谢　谢