相似矩阵及二次型

用配方法化二次型成标准形

用正交变换化二次型成标准形，具有保持几何形状不变的优点．如果不限于用正交变换，那么还可以有多种方法(对应有多个可逆的线性变换)把二次型化成标准形．这里只介绍拉格朗日配方法．

例　化二次型成标准形，并求所用的变换矩阵，其中

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 .$$

解　由于 f 中含变量 x_1 的平方项，故把含 x_1 的项归并起来，

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$$

上式右端除第一项外已不再含 x_1.

$$f=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3, \end{cases}$ $f=y_1^2+y_2^2$,

所用变换矩阵为 $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(|C|=1\neq 0\right).$

例　将二次型化成规范形，并求所用的变换矩阵，其中

$$f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3.$$

解　在 f 中不含平方项，由于含有 x_1x_2 乘积项，

令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$ 代入可得

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

再配方，得 $f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$

$$f=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(y_1-y_3), \\ z_2=\sqrt{2}(y_2-2y_3), \\ z_3=\sqrt{6}y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_1+\dfrac{1}{\sqrt{6}}z_3, \\ y_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z_2+\dfrac{2}{\sqrt{6}}z_3, \\ y_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}z_3, \end{cases}$

$$f=z_1^2-z_2^2+z_3^2.$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

$$\left(\left|C\right|=-\frac{1}{\sqrt{6}}\neq 0\right).$$

一般地，任何二次型都可用上面两例的方法找到可逆变换，把二次型化成标准形（或规范形）.

谢 谢