相似矩阵及二次型

二次型的定义及表示方法

1、二次型的定义

含有n个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为二次型，或记为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$

注　当常数项为实数时，称为实二次型.

2、二次型的矩阵表示

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+\ 2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$
$$=x_1\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\right)+x_2\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ +x_n\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\right)$$
$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A为对称矩阵.

$$f=x^TAx$$

例如， 二次型 $f = x^2 - 3z^2 - 4xy + yz$

用矩阵记号写出来，就是

$$f = (x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3、二次型的矩阵及秩

$$\left.\begin{array}{l}\text{任一二次型}\,f \longrightarrow \text{对称矩阵}A\\ \text{任一对称矩阵}A \longrightarrow \text{二次型}\,f\end{array}\right\}\text{一一对应}$$

f 称为对称矩阵A的二次型；A称为二次型f的矩阵；

对称矩阵A的秩称为二次型f的秩.

合同矩阵

矩阵的合同

1. 定义 设 A 和 B 是 n 阶矩阵, 若有可逆矩阵 C ,

使 $B = C^T AC$, 则称矩阵 A 与 B 合同.

2. 性质 (1). 合同关系为等价关系

(2). 与对称矩阵合同的矩阵也是对称矩阵

(3). 合同矩阵具有相同的秩.

二次型标准化

二次型的标准化问题

定义 只含有平方项的二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称为二次型的标准形.

定义 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2\cdots-x_{p+q}^2\,(p+q\le n)$

为二次型的规范形.

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0\end{pmatrix}$$

主要问题：　寻可逆变换$x=Cy$，使得

$$f=x^TAx=y^T(C^TAC)y$$

只含平方项．（二次型标准化）

要使二次型 f 经可逆变换 $x=Cy$ 变成标准形，就是要使

$$y^TC^TACy=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

$$=(y_1,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

也就是要使 C^TAC 成为对角阵.

主要问题是：对称矩阵 A 合同对角化.

用正交变换将二次型标准化

任给对称矩阵 A，总有正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$.

定理 任给二次型 $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \left(a_{ij} = a_{ji}\right)$，总有正交变换 $x = Py$，使 f 化为标准形 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$，

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)$ 的特征值.

推论 任给n元二次型 $f(x)=x^TAx\ (A^T=A)$，总有可逆变换 $x=Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形.

证 $f(Py)=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$,

设二次型 f 的秩为 r，则特征值 λ_i 中恰有 r 个不为 0，

不妨设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 不等于 0，$\lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$,

令 $K=\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}$，其中 $k_i=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\le r, \\ 1, & i>r, \end{cases}$

则 K 可逆，变换 $y=Kz$ 把 $f\left(Py\right)$ 化为

$$f\left(PKz\right)=z^T K^T P^T APKz=z^T K^T \Lambda Kz,$$

而 $K^T \Lambda K=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{\left|\lambda_1\right|},\cdots,\frac{\lambda_r}{\left|\lambda_r\right|},0,\cdots,0\right)$，记 $C=PK$，

可逆变换 $x=Cz$ 把 f 化成规范形 $f\left(Cz\right)=\frac{\lambda_1}{\left|\lambda_1\right|}z_1^2+\cdots+\frac{\lambda_r}{\left|\lambda_r\right|}z_r^2$.

用正交变换化二次型为标准形的具体步骤

1. 将二次型表成矩阵形式$f=x^TAx$,求出A;

2. 求出A的所有特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

3. 求出对应于特征值的特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$;

4. 将特征向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$正交化,单位化,得$p_1,p_2,\cdots,p_n$,
   记$P=\left(p_1,p_2,\cdots,p_n\right)$;

5. 作正交变换$x=Py$,则得f的标准形$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

例 求一个正交变换 $x = Py$，把二次型化为标准形，其中

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

解 二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

特征值为 $-2,1,1$

有正交阵

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

使 $P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，于是有正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

把二次型 f 化成标准形

$$f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2.$$

如果要把二次型 f 化成规范形，只需令

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$$

即得 f 的规范形

$$f = -z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 .$$

谢 谢