对称矩阵特征值、特征向量的性质

对称矩阵特征值、特征向量的性质

性质1. 对称矩阵的特征值为实数.

证　复数矩阵 $X=\left(x_{ij}\right)$，$\overline{X}=\left(\overline{x}_{ij}\right)$. 设 $Ax=\lambda x,\left(x\neq 0\right)$

用 $\overline{\lambda}$ 表示 λ 的共轭复数，　$A\overline{x}=\overline{A}\overline{x}=\overline{Ax}=\overline{\lambda x}=\overline{\lambda}\,\overline{x}$

于是有 $\overline{x}^T Ax=\overline{x}^T\left(Ax\right)=\overline{x}^T\lambda x=\lambda\overline{x}^T x$,

$\overline{x}^T Ax=\left(\overline{x}^T A^T\right)x=\left(A\overline{x}\right)^T x=\left(\overline{\lambda}\,\overline{x}\right)^T x=\overline{\lambda}\,\overline{x}^T x$

两式相减，得 $\underbrace{\left(\lambda-\overline{\lambda}\right)}_{=0}\overline{x}^T x=0$，$\overline{x}^T x=\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^2\neq 0$，

性质 2 设 λ_1，λ_2 是对称矩阵 A 的两个特征值，p_1，p_2 是对应的特征向量. 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 p_1 与 p_2 正交.

证 $\lambda_1 p_1 = Ap_1$，$\lambda_2 p_2 = Ap_2$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$.

因 A 对称，故 $\lambda_1 p_1^T = (\lambda_1 p_1)^T = (Ap_1)^T = p_1^T A^T = p_1^T A$，

于是 $\lambda_1 p_1^T p_2 = p_1^T A p_2 = p_1^T (\lambda_2 p_2) = \lambda_2 p_1^T p_2$，

即 $(\lambda_1 - \lambda_2) p_1^T p_2 = 0$. 但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，

故 $p_1^T p_2 = 0$，即 p_1 与 p_2 正交.

定理 设 A 为 n 阶对称矩阵，则必有正交阵 P ，使 $P^{-1}AP = P^{T}AP = \Lambda$ ，其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角矩阵.

推论 设 A 为 n 阶对称矩阵，λ 是 A 的特征方程的 k 重根，则矩阵 $A-\lambda E$ 的秩 $R\left(A-\lambda E\right)=n-k$，从而对应特征值 λ 恰有 k 个线性无关的特征向量.

证 $A\sim\Lambda=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)$

$$A-\lambda E\sim\Lambda-\lambda E=\mathrm{diag}\left(\lambda_1-\lambda,\cdots,\lambda_n-\lambda\right)$$

当 λ 是 A 的特征方程的 k 重根时，

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 这 n 个特征值中有 k 个等于 λ，有 n-k 个不等于 λ，

所以 $R\left(A-\lambda E\right)=R\left(\Lambda-\lambda E\right)=n-k$.

对称矩阵的正交对角化

n阶对称矩阵A正交对角化的步骤

(1) 求出A的全部特征值，设为$\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{l_1}$ ； $\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{l_2}$ ； $\cdots$ ； $\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{l_s}$.

($\lambda_1,\cdots,\lambda_s$两两不同，且$l_1+\cdots+l_s=n$)

(2) 解$(A-\lambda_i E)x=0$, 求A的l_i个线性无关的λ_i－特征向量，

(3) 各组内部正交化、单位化，

(4) 将各组向量并排得n阶正交阵P，

则$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=diag(\lambda_1,...,\lambda_n)$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求一个正交阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

解 $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时，解方程 $(A+2E)x=0$，

特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$，

得对应的线性无关特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

将ξ_2，ξ_3正交化：取$\eta_2=\xi_2$，

$$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

再将η_2，η_3单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

将 p_1, p_2, p_3 构成正交阵

$$P=\left(p_1, p_2, p_3\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

有 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^n.

解 因 A 对称，故有可逆阵 P 及对角阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

于是 $A=P\Lambda P^{-1}$，从而 $A^n=P\Lambda^n P^{-1}$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$. 于是 $\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\Lambda^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

当 $\lambda_1 = 1$ 时，解方程 $(A-E)x = 0$，得特征向量 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

当 $\lambda_2 = 3$ 时，解方程 $(A-3E)x = 0$，得特征向量 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

$$P = (\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1-3^n & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

谢 谢