方阵的相似对角化

1. 问题1： 何时能化？（找充要条件）

2. 问题2. 怎么化？ （找P和Λ）

1.问题1： 何时能化？（找充要条件）

假设已找到可逆阵 P， 使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵，

$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n\right)$， 由 $P^{-1}AP=\Lambda$ 得 $AP=P\Lambda$ 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1\boldsymbol{p}_1,\lambda_2\boldsymbol{p}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{p}_n),$$

于是有 $Ap_i=\lambda_i p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$. 可见 λ_i 是 A 的特征值，

而 P 的列向量 p_i 就是 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量.

反之，　若 A 有 n 个线性无关的特征向量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，

令 $P=\left(p_1, p_2, \cdots, p_n\right)$，则 P 可逆，且由 $AP=P\Lambda$ 知

$P^{-1}AP=\Lambda$，即 A 与对角阵相似.

定理：n阶矩阵A可相似对角化

$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量.

推论：如果n阶矩阵A有n个互不相等的特征值，

则A可对角化.

例 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，问$t$为何值时，矩阵$A$能对角化？

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & t \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

得 $\lambda_1=-1$， $\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，可求得线性无关的特征向量恰有 1 个，

A 可对角化 $\Leftrightarrow$ $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有 2 个线性无关的特征向量，

即方程$(A-E)x=0$有2个线性无关的解，

亦即系数矩阵$A-E$的秩$R(A-E)=1$.

$$A-E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & t\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & t+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

要$R(A-E)=1$，

得$t+1=0$，即$t=-1$.

因此，当$t=-1$时，矩阵A可对角化.

2. 问题2. 怎么化？（找P和Λ）

例 设矩阵$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，问$A$能否对角化？若能，则求可逆阵$P$和对角阵$\Lambda$，使$P^{-1}AP=\Lambda$.

解 先求 A 的特征值.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

得 $\lambda_1 = -1$， $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = -1$ 时，

解方程 $(A+E)x = 0$，

得对应的特征向量 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，解方程 $(A-2E)x=0$，

得对应的线性无关特征向量 $p_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$.

p_1,p_2,p_3 线性无关，从而 A 可对角化.

记 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-1&4\end{pmatrix}$，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

注：

对角矩阵的对角元的排列次序应与 P 中列向量的排列次序一致.

谢　谢